

# Pojęcie przekształcenia geometrycznego na płaszczyźnie, punkty stałe przekształcenia, przekształcenie izometryczne

## 1. Cele lekcji

### a) Wiadomości

1. Uchwycenie różnic pomiędzy funkcją zadaną wzorem  $f(x) = \dots$ , a przekształceniem opisanym poprzez formułę  $P((x, y)) = \dots$
2. Wskazanie uczniom różnorodnych przykładów przekształceń geometrycznych, nie występujących w dotychczasowej nauce szkolnej.

### b) Umiejętności

1. Uczeń poszukuje obrazów niektórych figur (punktów, prostej, okręgu) w rozważanych przekształceniach geometrycznych – wypracowanie ostrożnego podejścia w przewidywaniu obrazów figur.
2. Ćwiczenie umiejętności wnikliwego czytania i analizowania krótkich zapisów matematycznych.
3. Poszukiwanie argumentacji matematycznej dotyczącej punktów stałych, izometryczności, obrazów figur, zbioru wartości itp. rozważanych przekształceń – wpajanie konieczności znajdowania argumentów matematycznych na poparcie swoich sądów.
4. Uczeń poszukuje argumentacji matematycznej w oparciu o poznaną definicję.
5. Ćwiczenie umiejętności pracy w grupie.

## 2. Metoda i forma pracy

Praca indywidualna, praca w parach.

## 3. Środki dydaktyczne

1. Jeden komputer z projektorem multimedialnym i odpowiednim oprogramowaniem.
2. Podręcznik i zbiór zadań dla klasy pierwszej liceum ogólnokształcącego.

## 4. Przebieg lekcji

Wprowadzenie definicji punktu stałego.

*Punkt  $A$  jest punktem stałym przekształcenia  $P$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $P(A) = A$ .*

Uczniowie wskazują punkty stałe z przykładów na lekcjach wcześniejszych.

Wprowadzenie definicji przekształcenia izometrycznego. *Przekształcenie geometryczne nazywamy izometrycznym (izometrią) wtedy i tylko wtedy, gdy odległość między każdymi dwoma punktami jest taka sama jak odległość między ich obrazami.*

Uczniowie uzasadniają brak izometryczności w przykładach z lekcji wcześniejszych.

Kolejne przykłady przekształceń geometrycznych.

**Przykład 1:** Na płaszczyźnie dana jest prosta  $k$  i punkt  $A$  nie należący do prostej  $k$ . Obrazem punktu  $X$  należącego do półpłaszczyzny wraz z punktem  $A$  jest punkt przecięcia prostej  $XA$  z prostą  $k$ . Obrazem punktu nie należącego do półpłaszczyzny wraz z punktem  $A$  jest ten sam punkt.

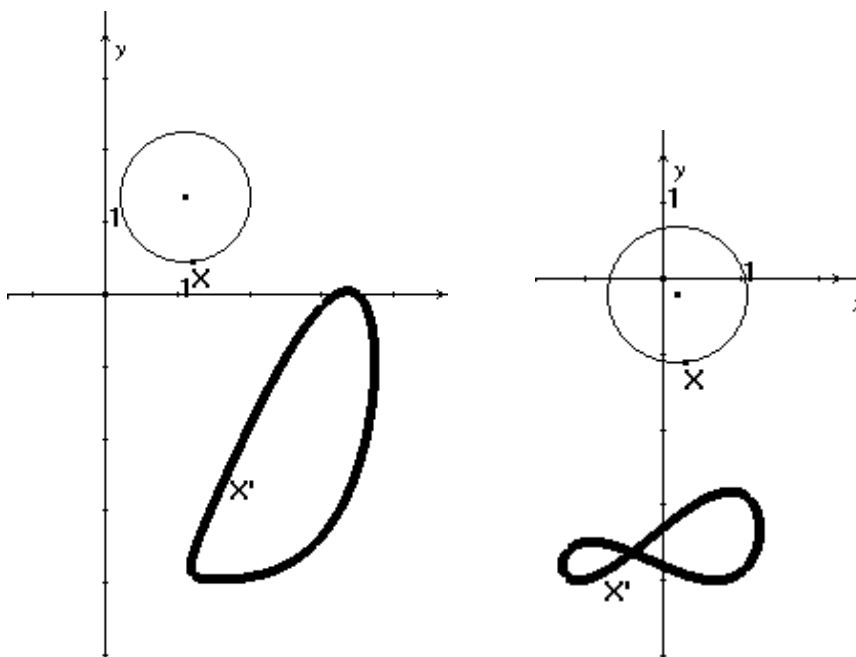
Polecenia dla uczniów:

- Znaleźć obrazy kilku punktów.
- Czy tak opisane przekształcenie spełnia warunki przekształcenia geometrycznego?
- Czy są jakieś punkty, które pokrywają się ze swoimi obrazami?
- Co może być obrazem prostej? (rozważ różne przypadki)
- Co może być obrazem okręgu? (rozważ różne położenia okręgu względem prostej  $k$ ).
- Jaki jest zbiór wartości tego przekształcenia?
- Czy można wskazać takie dwa punkty  $C$  i  $D$ , aby długość odcinka  $CD$  była różna od długości odcinka  $C'D'$ ?

Po pewnym czasie następuje rozmowa na temat uzyskanych wyników, prezentacja ich na komputerze z wykorzystaniem programu CABRI 1 (nauczyciel ma przygotowaną konstrukcję). To nie jest przekształcenie geometryczne i uczniowie powinni to zauważyć (rozmowa na ten temat – próba poprawienia definicji i potem praca nad dalszymi poleceniami).

**Przykład 2.** Dane jest przekształcenie zadane wzorem:  $P((x, y)) = (x + y, x^2 - 4)$ .

Polecenia dla uczniów są te same, co w przykładzie 1.



(obrazy okręgów o tym samym promieniu)

Po pewnym czasie następuje rozmowa na temat uzyskanych wyników, prezentacja ich na komputerze z wykorzystaniem programu CABRI 2 (można wykorzystać wersję DEMO). Ponadto

można spróbować znaleźć punkty stałe przekształcenia:  $\begin{cases} x = x + y \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$ , czyli otrzymujemy:

$(2,0), (-2,0)$ .

Zwrócenie uwagi (rozmowa z uczniami) na różnice między funkcją  $y = f(x)$ , a tak zadany

przekształceniem  $P((x, y)) = \dots(\text{argument, wartość})$ .

## 5. Bibliografia

1. Konior J., *Repetytorium z CABRI, część II*, [w:] „Matematyka i Komputery” nr 11, 2002, s. 5-8.
2. Pająk W., *Badanie przekształceń geometrycznych*, [w:] „Nauczyciele i Matematyka” nr 8, 1993, s. 22-23.
3. Pająk W., *Przekształcenia a CABRI 2*, [w:] „CABRI JEST” nr 10, lato 1997, s. 3-4.
4. Pająk W., *CABRI i przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie*, wydawnictwo VULCAN, Wrocław 1994.
5. Pająk W., *CABRI i przekształcenia*, [w:] „Matematyka” nr 6, 2006, s. 357-361.
6. Pawlak R i H., Rychlewicz A i A., Żyłak K., *Matematyka krok po kroku. Podręcznik dla klasy pierwszej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum. Zakres podstawowy i rozszerzony*, RES POLONA, Łódź 2002.
7. Pawlak R i H., Rychlewicz A i A., Żyłak K., *Matematyka krok po kroku. Zbiór zadań dla klasy pierwszej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum. Zakres podstawowy i rozszerzony*, RES POLONA, Łódź 2002.
8. Turnau S., *CABRI i geometria elementarna*, [w:] „Matematyka” nr 4, 1994, s. 212-214.

## 6. Załączniki

### a) Zadanie domowe

Zadanie 1. Dane jest przekształcenie zadane wzorem:  $P((x, y)) = (x - y, x + y)$ .

Zadanie 2. Skonstruuj własne (nie występujące w dotychczasowej nauce w szkole) przekształcenie geometryczne zadane dwunormowo.

Do powyższych zadań 1 i 2 zastosuj polecenia z przykładu 1.

Po takim cyklu lekcji może się odbyć krótki sprawdzian związany z interpretacją przekształcenia geometrycznego.

Przykład takiego sprawdzianu:

*Na płaszczyźnie dana jest prosta  $k$  i punkt  $A$  nie należący do prostej  $k$ . Obrazem punktu  $X$  należącego do półpłaszczyzny wraz z punktem  $A$  jest środek odcinka  $XA$ . Obrazem punktu  $Y$  nie należącego do półpłaszczyzny wraz z punktem  $A$  jest punkt  $Y'$  leżący w połowie odległości między punktem  $Y$  i prostą  $k$ .*

- Znaleźć obrazy kilku punktów.
- Czy tak opisane przekształcenie spełnia warunki przekształcenia geometrycznego? (odpowiedź uzasadnij)
- Czy są jakieś punkty, które pokrywają się ze swoimi obrazami? (wskaż je)
- Co może być obrazem odcinka? (rozważ różne położenia względem prostej  $k$ ).
- Jaki jest zbiór wartości tego przekształcenia? (narysuj lub opisz)

- Czy można wskazać takie dwa punkty C i D, aby długość odcinka CD była różna od długości odcinka C'D'? (wskaz je lub uzasadnij, że ich nie ma)

## **7. Czas trwania lekcji**

1,5 godziny lekcyjnej

## **8. Uwagi do scenariusza**

brak