ZESZYT ĆWICZEŃ

Szukając Einsteina
Akademia Umysłów Ścisłych
E = mc2

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty
Al. Jerozolimskie 32 00-024 Warszawa

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

SPIS TREŚCI

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

SZUKAJĄC EINSTEINA

Szansa dla wszystkich

Rozpoczynamy walkę o przyszłość Polski! Ta walka rozegra się na międzynarodowych rynkach, ale zacznie się w instytutach, laboratoriach i w fabrykach. Mogą ją wygrać nie wodzowie i bohaterscy żołnierze, a odkrywcy, wynalazcy i inżynierowie. Dziś liczą się światłe umysły. O sukcesie narodów decyduje wykształcenie.

Albert Einstein miał problemy w nauce i z trudem dostał się na Politechnikę. Genialny polski matematyk, profesor Stefan Banach nigdy nie ukończył żadnej uczelni. Odkrywca elementarnego ładunku elektrycznego, Robert Millikan w młodości studiował grekę. Fizyki nauczył się, gdy miał poprowadzić zajęcia na kursie przygotowawczym.

Julius Robert Oppenheimer, szef „projektu Manhattan" (budowa bomby jądrowej) był wszechstronnie uzdolniony, ale miał zamiar specjalizować się w chemii, a nie w fizyce. Urodzony w Strzelinie (wówczas Strehlen w Niemczech) Paul Ehrlich miał kłopoty z pisaniem wypracowań. Był także bardo nieporządny i roztargniony, a mimo to otrzymał w 1908 r. Nagrodę Nobla za badania nad odpornością organizmu (według „Uczeni w anegdocie" Andrzej. K. Wróblewski, Wydawnictwo Prószyński i S-ka)

Przed Tobą szansa!

Może nie jesteś w szkole prymusem i nie masz samych piątek, ale nam to nie przeszkadza. Ty też masz ukryte zdolności. Możesz osiągnąć wiele i zadziwić Rodziców oraz kolegów. Projekt „Szukając Einsteina – Akademia Umysłów Ścisłych" to szansa dla Ciebie. Wybierz to, co Ci najlepiej odpowiada. Liczy się ciekawość świata. Wykłady, jakie przygotowali naukowcy z Politechniki Warszawskiej pomogą Ci w wyborze najbardziej pasjonującej drogi życiowej.

Czy można całe życie mieć ciekawą pracę? Kiedy samemu decyduje się o swoim życiu? Jak zostać sławnym? Takie pytania zadaje sobie każdy, kto wkrótce stanie się dorosły. Mamy przed sobą tylko jedno życie. Chcielibyśmy, by było piękne i dostatnie. Być KIMŚ!

Od kilkuset lat prawie na całym świecie najwyżej cenieni są twórcy, naukowcy, odkrywcy, wynalazcy. Zostań jednym z nich! Przy Twoich zdolnościach jest to możliwe.

Nowe ośrodki, parki technologiczne i inkubatory przedsiębiorczości czekają na wykształconych, młodych ludzi, którzy mają pomysły i chcą osiągnąć sukces. To w Gdyni powstał najlepszy na świecie syntezator mowy, to w Łodzi przygotowywane są najlepsze kamizelki kuloodporne, a w Krakowie projektuje się metalowe odlewy dla najlepszych firm amerykańskich.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Proponujemy obejrzenie przygotowanych wykładów w charakterze inspiracji. Jak widać wykorzystanie zdobytej wiedzy jest możliwe już dziś, także w Polsce.
Na jednym z prezentowanych wykładów dowiesz się wiele na temat nowych źródeł światła. To wstęp do wielu praktycznych zastosowań. Popatrz na tzw. świetlówkę energooszczędną. Szklana rurka pokryta jest od wewnątrz białą substancją. Pod wpływem prądu elektrycznego rozrzedzony gaz, znajdujący się w rurce, wytwarza niewidoczne dla oka promieniowanie ultrafioletowe. To promieniowanie pada na białą substancję, która zaczyna świecić. Naukowcy z Wrocławia pracują nad tym, by to świecenie było przyjemniejsze i lepiej przystosowane do naszego oka. Z kolei naukowcy z jednego z instytutów w Warszawie pracują nad nowymi, nieznanymi dotąd źródłami światła. Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki 3.
Inny, proponowany wykład dotyczy ognia i palenia. To temat fascynujący szczególnie młodych chemików. Niewiele osób wie, że kilka lat temu polski chemik uzyskał patent na nowy sposób gaszenia pożarów przy użyciu znikomych ilości wody.
Jak wiadomo, w każdym przenośnym urządzeniu elektronicznym najsłabszym elementem jest bateria. Gdyby tak mogła zapewnić nam dłuższy czas pracy telefonu lub przenośnego komputera... Na Politechnice Warszawskiej prowadzone są badania nad nowymi typami baterii, które powinny być tańsze i bardziej pojemne. Tego tematu dotyczy inny z przygotowanych wykładów.
Gruby pancerze chroni życie czołgistów. Niestety, przeciwnicy budują pociski, które przebijają wielowarstwowe blachy. Czasem wystarczy jednak stosunkowo cienka płytka ceramiczna, by pancerz stał się odporny na uderzenia pocisków.
Talerze, kubki i wazony. Każdy z nas codziennie korzysta z ceramiki. Dachówki i cegły, ale także filtry i kule do młynów kulowych oraz implanty są niezbędne w domu, medycynie lub w przemyśle. Na jednym z wykładów dowiemy się o wielu współczesnych zastosowaniach ceramiki.
Nowe materiały, nowe technologie, nowe urządzenia, to wszystko wymaga znajomości fizyki i matematyki. Właśnie dlatego zrealizowane nagrania dotyczą tych właśnie dziedzin. Chcieliśmy, by dały one szansę zapoznania się nie tylko z najnowszymi kierunkami badań. Naukowcy starali się przybliżyć zagadnienia, które mają znaczenie praktyczne.
Jak korzystać z nagranych wykładów? Najpierw wybierz te, których tytuły są najciekawsze. Najciekawsze dla Ciebie. Nie musisz od razu oglądać całości wykładu. Jeśli coś cię zainteresuje, przerwij odtwarzanie i poszukaj dodatkowych informacji. W Internecie lub w książkach. Potem możesz wrócić do wykładu. Pewnie warto będzie przerwać wykład nawet kilka razy. Wyjaśnienia i uzupełnienia znalezione w sieci warto sobie zanotować.
W kolejnych dniach dobrze jest obejrzeć wykład jeszcze raz! Tym razem w całości. Może warto na ten temat napisać własną rozprawkę lub prezentację dla kolegów. Masz już przecież dodatkowe materiały o których nie wspomniał wykładowca!

A gdyby tak spróbować opisać zastosowania zdobytej wiedzy? Nie jest wykluczone, że wpadniesz na pomysł, którego nie zauważyli uczeni. Warto go sobie zapisać. Jeśli mamy możliwości, dobrze jest spróbować przeprowadzić proste doświadczenia. O pomoc można poprosić nauczyciela. Niektóre uczelnie zapraszają do swoich laboratoriów. Tam można dowiedzieć się, jak sprawdzić swoje pomysły.

Zachęcamy do zapoznania się także z innymi tematami. Najlepiej z tymi, które są związane z ulubioną dziedziną wiedzy. Być może to w nich kryje się coś, co zmieni Twoje życie!

Byłoby znakomicie, gdybyś obejrzał także wykłady, których tytuły nic Ci nie mówią. Nauka obejmuje obszary wiedzy o których pewnie jeszcze nie słyszałeś. Te nowe lądy kryją zagadki i prawdziwe skarby. Ich odkrywcy mają największe szanse na Nagrodę Nobla. To najbardziej przyszłościowe obszary badań. To szansa także dla Ciebie!

Pamiętaj, Einstein, Millikan i Banach nie od razu zostali uczonymi.

Spróbuj. Czekamy także na Twoje osiągnięcia w przyszłości. Dziś patriotyzm to także tworzenie nowych technologii i konstrukcji, wynalazki i odkrycia, które poprawią pozycję Polski na świecie.

MATEMATYKA

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

PARADOKSY RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA

dr Krzysztof Bryś

Zadanie 1. Rzucamy dwiema identycznymi kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma oczek wynosi a) 7, b) 8.

ROZWIĄZANIE

Zgodnie z tym co zostało wyjaśnione w trakcie wykładu, aby skorzystać z klasycznej definicji prawdopodobieństwa trzeba założyć, że kostki są rozróżnialne (np. biała i czarna). Nie zmienia to poszukiwanych prawdopodobieństw (bo niezależnie od tego czy obserwator rozróżnia kolory czy nie będą one takie same). Zatem zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω ma liczność 6 • 6 = 36 (dla każdego z 6 możliwych wyników rzutu białą mamy 6 możliwych wyników rzutu czarną kostką. Każde zdarzenie elementarne jest uporządkowaną parą postaci(b, c), gdzie b = liczba oczek na białej kostce, c = liczba oczek na czarnej kostce.
a) Niech A - zdarzenie polegające na wyrzuceniu na obu kostkach w sumie 7 oczek. Wypiszmy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające temu zdarzeniu
Jest ich 6, Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

b) Niech*B* - zdarzenie polegające na wyrzuceniu na obu kostkach w sumie 8 oczek. Wypiszmy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające temu zdarzeniu
A = {(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)}.
Jest ich 5, Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi:

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

Prawdopodobieństwo wyrzucenia w sumie 7 oczek jest większe niż prawdopodobieństwo wyrzucenia 8 oczek,

Zadanie 2. (Paradoks hazardzisty) Rzucamy sześć razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia orła za szóstym razem jeśli

1. w pierwszych pięciu rzutach za każdym razem wypadł orzeł?
2. w pierwszych pięciu rzutach za każdym razem wypadła reszka?

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

ROZWIĄZANIE:
Wbrew temu co może sugerować intuicja w obu przypadkach prawdopodobieństwa wyrzucenia orła są takie same i wynoszą Jest tak bo kolejne rzuty monetą są doświadczeniami niezależnymi a ich wyniki zdarzeniami niezależnymi czyli wynik kolejnego rzutu nie zależy od wyników poprzednich. Spróbujmy przekonać nieprzekonanych uzasadniając tą odpowiedź obliczeniami. Wprowadźmy następujące zdarzenia 05 - wypadły same orły w pierwszych pięciu rzutach, R5 - wypadły same reszki w pierwszych pięciu rzutach, O - orzeł wypadł w szóstym rzucie.

Zauważmy, że zdarzenie O $\cap$ R5 mówi, że w pięciu pierwszych rzutach wypadły same reszki a w szóstym wypadł orzeł. Zdarzenie to składa się z jednego zdarzenia elementarnego - ciągu złożonego

Dla doświadczenia polegającego na pięciokrotnym rzucie monetą zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych ma liczność $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$, gdyż za każdym razem mamy dwie możliwości (wypada orzeł albo reszka) zatem przy każdym kolejnym rzucie liczba zdarzeń elementarnych powiększa się dwukrotnie (do każdego ciągu złożonego z wyników poprzednich rzutów dokładamy albo orła albo reszkę a tym samym podwajamy liczbę tych ciągów). Łatwo zauważyć, że podobnie jak zdarzenie 05 (ciąg samych orłów) tak i zdarzenieR5 (ciąg samych reszek) składa się z jednego zdarzenia elementarnego. Zatem

$$P(O5) = P(R5) = \frac{1}{32}$$

a) Mamy obliczyć prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia O wiedząc, że zaszło zdarzenie 05 czyli należy wyznaczyć prawdopodobieństwo warunkowe *P(O|O5).* Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe otrzymujemy

$$P(O|O5) = \frac{P(O \cap O5)}{P(O5)}.$$

Zauważmy, że zdarzenie O $\cap$ 05 mówi, że w pięciu pierwszych rzutach oraz w szóstym wypadł orzeł. Zdarzenie to składa się z jednego zdarzenia elementarnego - ciąg sześciu orłów. Wszystkich zdarzeń elementarnych w przypadku sześciu rzutów monetą jest $2^6 = 64$. Zatem *P(0* $\cap$ 05) =1/64. Wstawiając do wzoru otrzymujemy:

$$P(O|O5) = \frac{P(O \cap O5)}{P(O5)} = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}.$$

b) Analogicznie mamy obliczyć prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia O wiedząc, że zaszło zdarzenie *R5,* czyli należy wyznaczyć prawdopodobieństwo warunkowe *P(O|R5).* Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe otrzymujemy

$$P(O|R5) = \frac{P(O \cap R5)}{P(R5)}.$$

Zauważmy, że zdarzenie O $\cap$ R5 mówi, że w pięciu pierwszych rzutach wypadły same reszki a w szóstym wypadł orzeł. Zdarzenie to składa się z jednego zdarzenia elementarnego - ciągu złożonego z pięciu reszek i orła na końcu. Wszystkich zdarzeń elementarnych w przypadku sześciu rzutów monetą jest $2^6 = 64$, Zatem P(0$\cap$R5) =1/64. Wstawiając do wzoru otrzymujemy:

$$P(O|R5) = \frac{P(O \cap R5)}{P(R5)} = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 3. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana liczba naturalna jest podzielna przez 6 lub przez 9.

ROZWIĄZANIE

Niech A_6 oznacza zdarzenie polegające na tym, że losowo wybrana liczba naturalna jest podzielna przez 6, a A_9 , że jest podzielna przez 9. Mamy obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenie A_6 U A_9 . Zwróćmy uwagę na to, że są liczby, które są podzielne i przez 6 i przez 9, Są to liczby podzielne przez najmniejszą wspólną wielokrotność tych liczb czyli 18. Aby nie liczyć szans wystąpienia takich liczb podwójnie należy od sumy prawdopodobieństw zdarzeń A_6 oraz A_9 odjąć prawdopodobieństwo wystąpienia obu tych zdarzeń równocześnie czyli zdarzenia $A_6 \cap A_9 = A_{18}$ polegającego na tym, że losowo wybrana liczba naturalna jest podzielna przez 18.

W celu obliczenia potrzebnych prawdopodobieństw nie możemy skorzystać z klasycznej definicji prawdopodobieństw bo zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych czyli zbiór liczb naturalnych jest nieskończony. W takim przypadku jako prawdopodobieństwo wystąpienia danego zdarzenia można przyjąć częstość występowania danego zdarzenia.

Zwróćmy uwagę na to, że co k-ta liczba naturalna jest podzielna przez k. Stąd

$$P(A_6) = \frac{1}{6}, P(A_9) = \frac{1}{9}, P(A_{18}) = \frac{1}{18}.$$

Otrzymujemy zatem

$$P(A_6 \cup A_9) = P(A_6) + P(A_9) - P(A_6 \cap A_9) = P(A_6) + P(A_9) - P(A_{18}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{18} = \frac{3+2-1}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.$$

Zadanie 4. Wiadomo, że średnio co piąty uczeń nie umie rozwiązać poprawnie tego zadania. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybranemu uczniowi wydaje się, że umie rozwiązać to zadanie, jeśli rzeczywiście potrafi je rozwiązać wynosi 0.75. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybranemu uczniowi wydaje się, że umie rozwiązać to zadanie, jeśli w rzeczywistości nie potrafi rozwiązać go poprawnie, wynosi 0.25. Losowo wybranemu uczniowi wydaje się, że umie rozwiązać to zadanie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzeczywiście umie je rozwiązać?

ROZWIĄZANIE

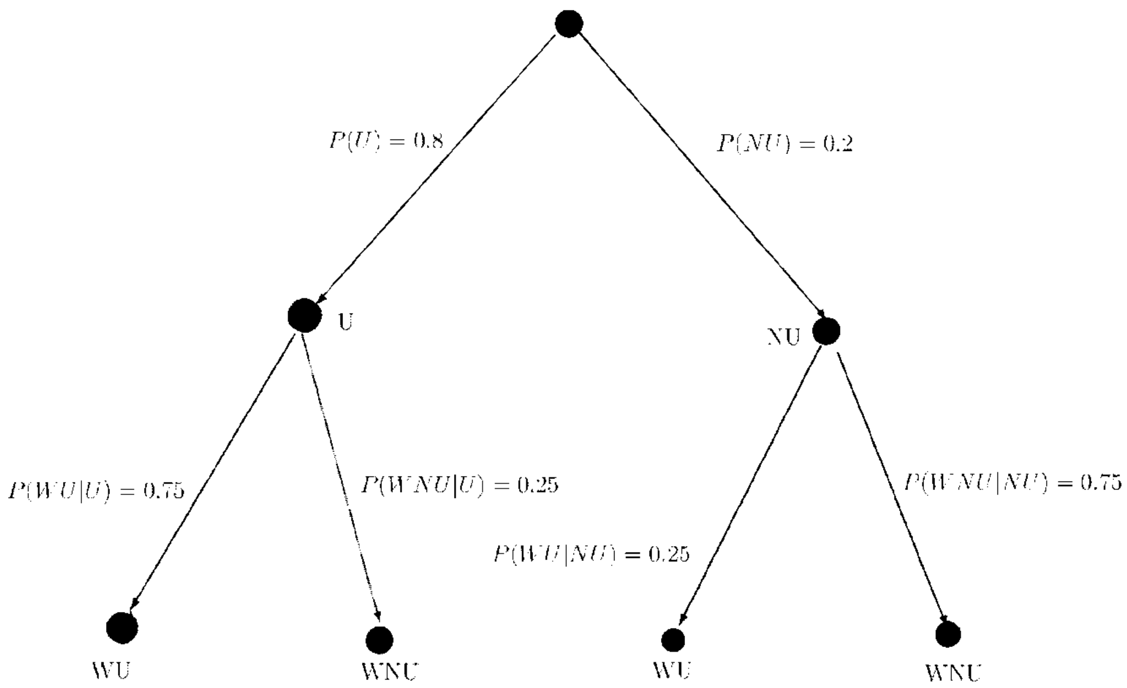
Określmy wpierw model matematyczny związku przyczynowo-skutkowego. Przyczyny determinują skutki zatem przyczyny to fakty (nieznane - uczeń w rzeczywistości albo potrafi albo nie potrafi poprawnie rozwiązać tego zadania) a skutki to wyobrażenia ucznia o tych faktach (wydaje mu się, że umie albo wydaje mu się, że nie umie poprawnie rozwiązać to zadanie). To fakty wpływają na wyobrażenia o nich a nie odwrotnie.

PRZYCZYNY to fakty czyli następujące zdarzenia:
U - losowo wybrany uczeń umie rozwiązać poprawnie to zadanie ,
NU - losowo wybrany uczeń nie umie poprawnie rozwiązać tego zadania.

Ponieważ z treści zadania wynika, że średnio co piąty uczeń nie umie rozwiązać tego zadania, to możemy przyjąć, że P(U) = 4/5 = 0.8, P(NU) = 1/5 = 0.2

SKUTKI - to wyobrażenia ucznia o faktach czyli następujące zdarzenia:
WU - losowo wybranemu uczniowi wydaje się, że umie poprawnie rozwiązać to zadanie,
WNU - losowo wybranemu uczniowi wydaje się, że nie umie poprawnie rozwiązać tego zadania.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki



Z treści zadania wynika, że zaszedł skutek WU a szukamy prawdopodobieństwa tego, że spowodowała to przyczyna U. Zatem powinniśmy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe P(U|WU). Jest to prawdopodobieństwo zajścia przyczyny U pod warunkiem, że zaszedł skutek WU. Zatem należy skorzystać ze wzoru Bayesa:

$$P(U|WU) = \frac{P(U \cap WU)}{P(WU)} = \frac{P(U) \cdot P(WU|U)}{P(U) \cdot P(WU|U) + P(NU) \cdot P(WU|NU)}$$

Z treści zadania wynika, że prawdopodobieństwo tego, że uczniowi wydaje się, że umie poprawnie rozwiązać to zadanie jeśli w rzeczywistości potrafi wynosi P(WU|U) = 0.75 a jeśli w rzeczywistości nie potrafi, to prawdopodobieństwo to wynosi P(WU|NU) = 0.25

Podstawiając wyznaczone prawdopodobieństwa do zapisanego powyżej wzoru otrzymujemy:

$$P(U|WU) = \frac{0.8 \cdot 0.75}{0.8 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.25} = \frac{0.60}{0.60 + 0.05} = \frac{0.60}{0.65} = \frac{12}{13}$$

Zatem w sytuacji opisanej w treści zadania średnio w 12 przypadkach na 13 uczeń, któremu wydaje się, że potrafi poprawnie rozwiązać to zadanie, rzeczywiście to potrafi. Tylko średnio jednemu na 13 źle się wydaje w takim przypadku.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zadanie 5. Wiadomo, że średnio jeden na 10 000 uczniów jest uzależniony od rozwiązywania zadań z rachunku prawdopodobieństwa. Badanie profilaktyczne wykrywa uzależnienie u 99 % badanych osób, które rzeczywiście są uzależnione oraz u 1% badanych osób, które nie są uzależnione. U losowo wybranego ucznia badanie wykryło uzależnienie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest on w rzeczywistości uzależniony?

ROZWIĄZANIE

Określmy wpierw model matematyczny związku przyczynowo-skutkowego. Przyczyny determinują skutki zatem przyczyny to fakty (nieznane - po to robi się badanie by dowiedzieć się jakie one są) dotyczące schorzenia (uzależnienia) a skutki to wyobrażenia o tych faktach będące wynikiem badania. To fakty determinują wyobrażenia o nich a nie odwrotnie. To czy ktoś w momencie badania cierpi na jakąś przypadłość nie zależy od tego jaki będzie wynik badania. Za to wynik badania zależy od stanu faktycznego.

PRZYCZYNY to fakty czyli następujące zdarzenia:

U - losowo wybrany uczeń jest uzależniony w rzeczywistości,

NU - losowo wybrany uczeń nie jest uzależniony w rzeczywistości.

Ponieważ średnio jeden na 10000 uczniów jest uzależniony zatem możemy przyjąć, że $P(U) = 0.0001$, $P(NU) = 0.9999$

SKUTKI - to wyobrażenia o faktach czyli następujące zdarzenia:

BU - badanie wykazało, że losowo wybrany uczeń jest uzależniony,

BNU - badanie wykazało, że losowo wybrany uczeń nie jest uzależniony.

Z treści zadania wynika, że zaszedł skutek BU a szukamy prawdopodobieństwa zajścia w takiej sytuacji przyczyny U. Zatem powinniśmy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe *P(U|BU).* Jest to prawdopodobieństwo zajścia przyczyny U pod warunkiem, że zaszedł skutek BU zatem należy skorzystać ze wzoru Bayesa:

$$P(U|BU) = \frac{P(U \cap BU)}{P(BU)} = \frac{P(U) \cdot P(BU|U)}{P(U) \cdot P(BU|U) + P(NU) \cdot P(BU|NU)}$$

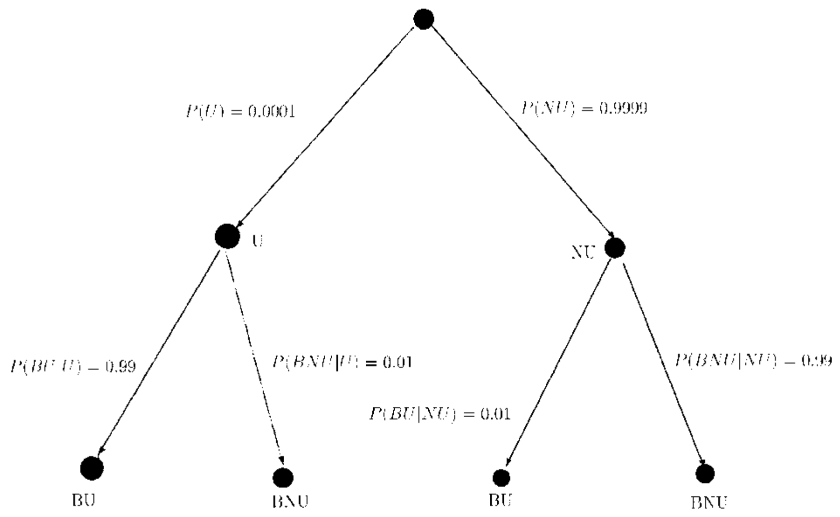
Z treści zadania wynika, że prawdopodobieństwo wykrycia uzależnienia u ucznia uzależnionego wynosi *P(BU|U)* = 0,99 a ucznia nieuzależnionego *P(BU|NU)* = 0,01.

Podstawiając te prawdopodobieństwa do powyższego wzoru otrzymujemy:

$$P(U|BU) = \frac{0.0001 \cdot 0.99}{0.0001 \cdot 0.99 + 0.9999 \cdot 0.01} = \frac{0.000099}{0.000099 + 0.009999} = \frac{0.000099}{0.010098} = \frac{99}{10098} = \frac{1}{102}$$

czyli szanse, że uczeń u którego wykryto uzależnienie jest w rzeczywistości uzależniony są mniejsze niż 1%. Mimo, że test ten wykrywa uzależnienie u 99% uzależnionych!

Warto zauważyć, że analogicznie można rozumować w przypadku badania jakości dowolnych testów medycznych. Ale nie tylko. Powyższy schemat rozwiązania znajduje zastosowanie w kryminalistyce ale i w edukacji ! Wystarczy uświadomić sobie, że klasówka jest swego rodzaju testem, badaniem mającym na celu wykrycie czy uczeń się nauczył.



<u>Zadanie 6</u>. W pewnym mieście mieszka 100 000 mieszkańców. Tylko jeden spośród nich jest matematykiem. Wiadomo, że 90% matematyków nie odnosi tacki przy odejściu od stolika w restauracji typu fast food,. W przypadku ludzi, którzy nie są matematykami, tylko 10% nie odnosi tacki, W restauracji typu fast food policja odnalazła przy stoliku tackę, która nie została odniesiona. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że sprawcą tego czynu jest matematyk ?

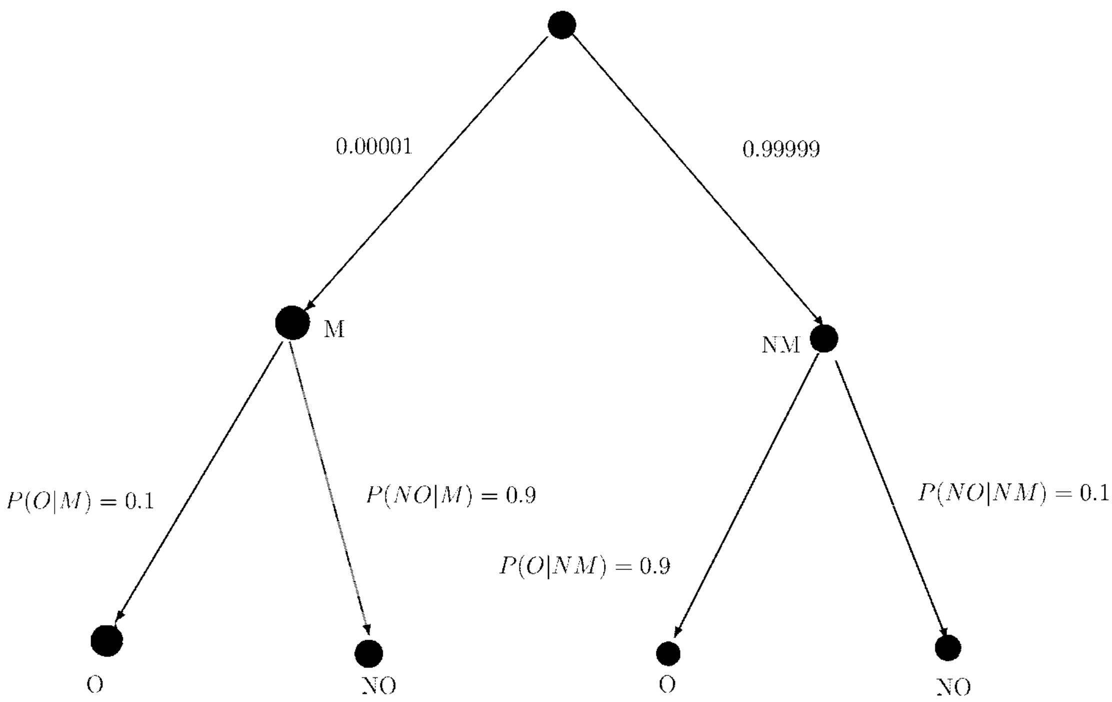
ROZWIĄZANIE

Stwórzmy wpierw model matematyczny związku przyczynowo-skutkowego, W tym wypadku związek ten wynika z chronologii wydarzeń. Przyczyny to nieznane fakty dotyczące sprawcy tego czynu a skutki to zajście lub niezajście "przestępstwa"

opisanego w treści zadania. Warto zwrócić uwagę na to, że analogiczne obliczenia powinny być przeprowadzone w sytuacji gdy poszukując sprawcy przestępstwa zastanawiamy się czy należy on do określonej grupy społecznej, o której wiadomo, że częściej niż reszta społeczeństwa dopuszcza się danych przestępstw.
PRZYCZYNY to następujące zdarzenia:
M - sprawcą czynu jest matematyk,
NM -sprawcą czynu nie jest matematyk.
Ponieważ z treści zadania wynika, że wśród 100000 mieszkańców miasta tylko jeden jest matematykiem, to

$$P(M) = \frac{1}{100000} = 0.00001,\ P(NM) = \frac{99999}{100000} = 0.99999$$

SKUTKI - to następujące zdarzenia:
O - tacka została odniesiona,
NO - tacka nie została odniesiona.
Z treści zadania wynika, że miało miejsce "przestępstwo" polegające na tym, że tacka nie została odniesiona zatem zaszedł skutek NO a szukamy prawdopodobieństwa tego, że spowodował to matematyk czyli wywołała to przyczyna M. Zatem powinniśmy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe P(M\NO). Jest to prawdopodobieństwo zajścia przyczyny M pod warunkiem, że zaszedł skutek NO, Zatem należy skorzystać ze wzoru Bayesa:
Z treści zadania wynika, że prawdopodobieństwo tego, że tacka nie zostanie odniesiona wynosi w przypadku matematyka *P(NO|M)* = 0.9 a w przypadku osoby, która nie jest matematykiem *P(NO\NM)* = 0.1.



Podstawiając wyznaczone prawdopodobieństwa do zapisanego powyżej wzoru otrzymujemy:

$$P(M|NO) = \frac{0.00001 \cdot 0.9}{0.00001 \cdot 0.9 + 0.99999 \cdot 0.1} = \frac{0.000009}{0.000009 + 0.099999} = \frac{0.000009}{0.100008} = \frac{9}{100008} = \frac{1}{11112}$$

Otrzymane prawdopodobieństwo nie jest wcale tak wysokie jak mogłoby się wydawać przy pobieżnej analizie sytuacji opisanej w treści zadania. Wynika to z faktu, że informacja o zajściu czynu odwraca sytuację. Nie pytamy o to jak często matematycy dopuszczają się danego czynu ale o to jakie są szanse, w przypadku zaistnienia danego czynu, że spowodował to matematyk. Rzadkie występowanie matematyka w przyrodzie powoduje, że prawdopodobieństwo iż to on jest sprawcą staje się niewielkie. Szanse na to, że jest on sprawcą czynu jest wiele razy mniejsze niż na to, że zrobił to ktoś spośród reszty mieszkańców miasta,

Zadanie 7. (Paradoks pudełek Bertranda) Dane są 3 pudełka. Jedno zawiera 2 czarne kule, drugie zawiera 2 białe kule a trzecie zawiera jedną czarną i jedną białą kulę, Z losowo wybranego pudełka wyciągnięto jedną losowo wybraną kulę. Okazało się, że wylosowana kula jest czarna. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że druga kula w tym pudełku jest czarna?

ROZWIĄZANIE

Jest to tak naprawdę inna wersja paradoksu Monty Halla o czym można się przekonać analizując dokładnie treść zadania.
Określmy wpierw schemat związku przyczynowo-skutkowego, W tym wypadku związek ten wynika z chronologii wydarzeń,

PRZYCZYNY - to oczywiście fakty które miały miejsce wpierw czyli następujące zdarzenia:
C2 - wylosowano pudełko z dwiema czarnymi kulami,
BC - wylosowano pudełko z jedną białą i jedną czarną kulą,
B2 - wylosowano pudełko z dwiema białymi kulami. Wylosowanie każdego z tych trzech pudełek jest jednakowo prawdopodobne.
Zatem P(C2) = P(BC) = P(B2) =1/3

SKUTKI - to w przypadku tego zadania zdarzenia, które mogą mieć miejsce po wylosowaniu pudełka czyli:
B - wylosowano kulę białą,
C- wylosowano kulę czarną.

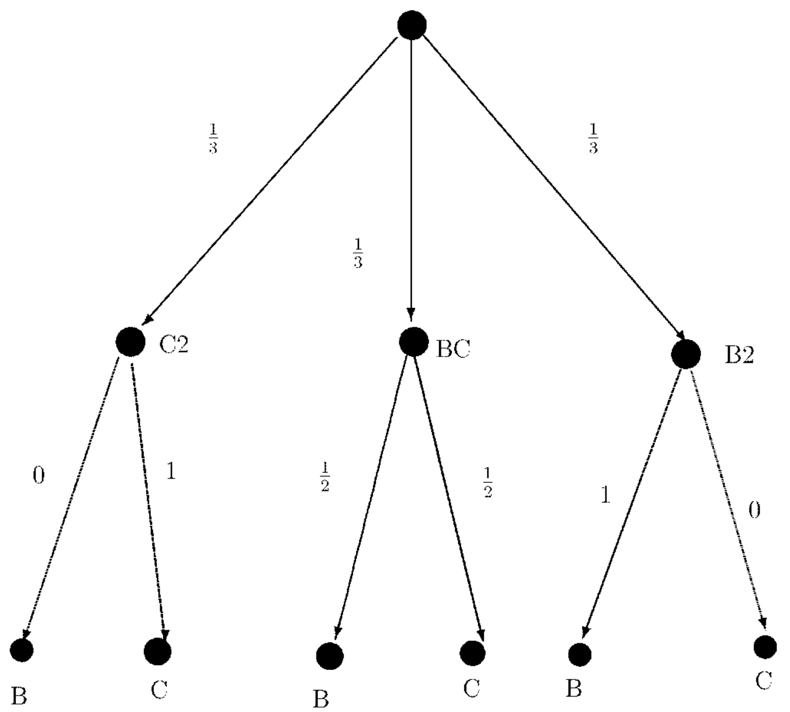
Z treści zadania wynika, że zaszło zdarzenie C (wyciągnięto kulę czarną) a pytamy o prawdopodobieństwo, że spowodowało to zajście zdarzenia C2 (kula została wyciągnięta z pudełka, w którym obie są czarne). Zatem powinniśmy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe P(C2\C). Jest to prawdopodobieństwo zajścia przyczyny C2 pod warunkiem, że zaszedł skutek C zatem należy skorzystać ze wzoru Bayesa:

$$P(C2|C) = \frac{P(C2 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C2) \cdot P(C|C2)}{P(C2) \cdot P(C|C2) + P(BC) \cdot P(C|BC) + P(B2) \cdot P(C|B2)}$$

W przypadku gdy losujemy z pudełka, w którym jest jedna kula biała i jedna czarna prawdopodobieństwo wyciągnięcia czarnej wynosi *P(C|BC) =1/2.*

W przypadku gdy losujemy z pudełka, w którym są dwie kule białe prawdopodobieństwo wyciągnięcia czarnej wynosi 0 Czyli *P(C|B2)* = 0.

W przypadku gdy losujemy z pudełka, w którym są dwie kule czarne prawdopodobieństwo wyciągnięcia czarnej wynosi *P(C|C2)* = 1,



Podstawiając te prawdopodobieństwa do powyższego wzoru otrzymujemy:

$$P(C2|C) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Zadanie 8. (Paradoks więźnia). Spośród trzech więźniów, Augusta, Bernarda i Czesia, dwóch ma być straconych, August nie wie jednak, którzy to będą. Zwrócił się zatem do strażnika:

-Z pewnością Bernard, lub Czesio będzie stracony, tak więc jeśli podasz mi imię jednego spośród nich, który będzie stracony, to nic mi nie powiesz o moim losie.

Po chwili namysłu strażnik odpowiedział:

-Bernard będzie stracony.

Wtedy August poczuł się spokojniejszy gdyż uznał, że prawdopodobieństwo jego stracenia zmalało z 2/3 do 1/2 . Czy miał rację? Uzasadnij odpowiedź,

ROZWIĄZANIE

Oczywiście nie miał racji. Pokażemy to stosując wzór Bayesa,
PRZYCZYNY - to oczywiście fakty (nieznane Augustowi ale znane strażnikowi) czyli następujące zdarzenia:
AP - August przeżyje,
BP - Bernard przeżyje,
CP - Czesio przeżyje.

Ponieważ dla każdego z nich jest jednakowo prawdopodobne, że przeżyje (zakładamy, że ten który przeżyje jest wybierany losowo) więc P(AP) = P(BP) = P(CP) =1/3.

SKUTKI - to w przypadku tego zadania decyzje podjęte przez strażnika (który, jak wynika z treści zadania, zna fakty):
B - strażnik powie, że Bernard zostanie stracony,
C- strażnik powie, że Czesio zostanie stracony,
Z treści zadania wynika, że zaszło zdarzenie B, Zatem powinniśmy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe P(AP|B). Jest to prawdopodobieństwo zajścia przyczyny AP pod warunkiem, że zaszedł skutek B zatem należy skorzystać ze wzoru Bayesa:

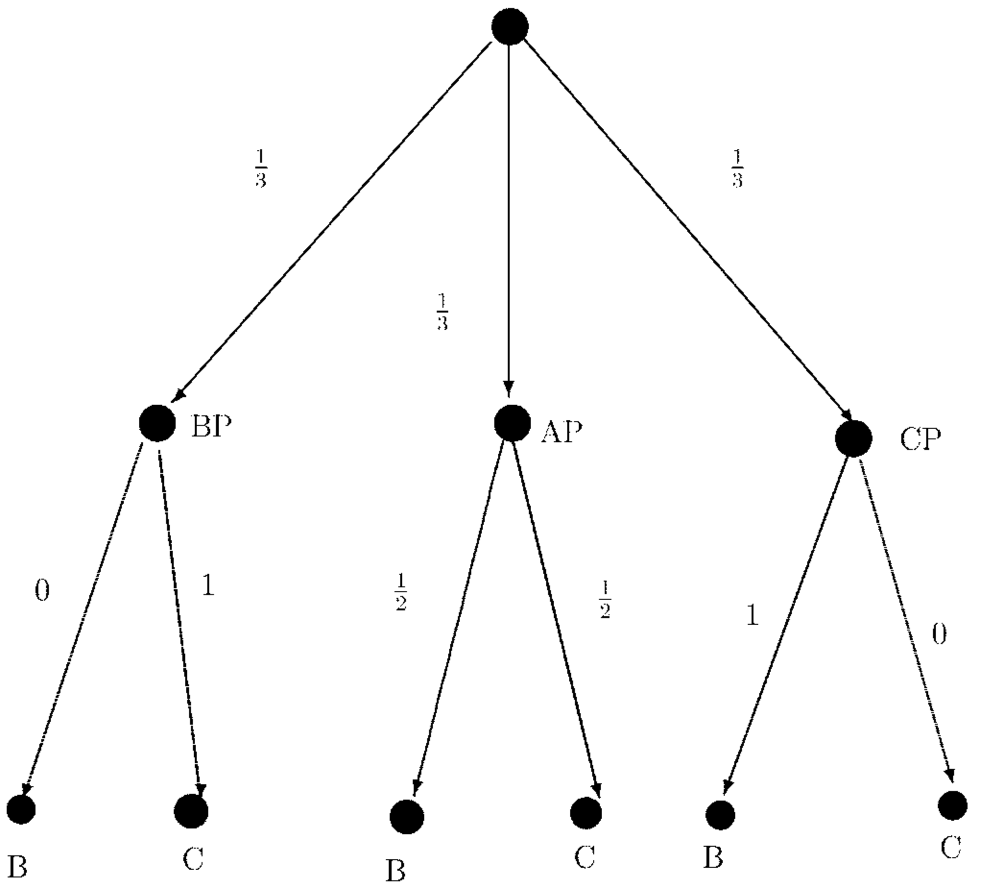
$$P(AP|B) = \frac{P(AP \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AP) \cdot P(B|AP)}{P(AP) \cdot P(B|AP) + P(BP) \cdot P(B|BP) + P(CP) \cdot P(B|CP)}$$

W przypadku gdy przeżyć ma August strażnik informuje, że stracony zostanie losowo wybrany je-den z dwóch pozostałych więźniów zatem P(B|AP)=1/2.
W przypadku gdy przeżyć ma Bernard strażnik informuje, że stracony zostanie Czesio zatem prawdopodobieństwo, że powie w takiej sytuacji, że stracony będzie Bernard wynosi 0. Czyli P(B|BP)=0.
W przypadku gdy przeżyć ma Czesio strażnik informuje, że stracony zostanie Bernard zatem P(B|CP)=1

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Podstawiając te prawdopodobieństwa do powyższego wzoru otrzymujemy:

$$P(AP|B) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Zatem prawdopodobieństwo, że August przeżyje nie zmieniło się i dalej wynosi 1/3 a tym samym prawdopodobieństwo, że zostanie stracony wynosi wciąż 2/3.

Aby rozwiązać poprawnie to zadanie wystarczy zauważyć, że jest to inna wersja (starsza historycznie) paradoksu Monty Halla. Zamiast bramek są więźniowie. Nagrodą jest przeżycie. Strażnik ujawniając informację o więźniu, który zostanie stracony podaje informację analogiczną do odsłonięcia jednej z dwóch niewybranych przez gracza bramek (takiej za którą nie ma ukrytej nagrody) w paradoksie Monty Halla.

SKRZYNKA Z NARZĘDZIAMI MŁODEGO KOMBINATORYKA

Paweł Naroski

ZADANIA

1. Ze zbioru {1,..., 2n} wybieramy n+1 różnych liczb. Pokazać, że zawsze wśród tych liczb znajduje się para liczb, których suma wynosi 2n + 1.
2. Ze zbioru {1,..., 2n} wybieramy n+1 różnych liczb. Pokazać, że zawsze wśród tych liczb znajduje się para liczb względnie pierwszych.
3. W pewnym sklepie znajduje się sześć słojów wypełnionych galaretkami w ośmiu kolorach. Jest dokładnie dwadzieścia galaretek w każdym kolorze. Wykaż, że istnieje słój, który zawiera co najmniej dwie galaretki w kolorze x i co najmniej dwie galaretki w kolorze y dla pewnych dwóch różnych kolorów x i y.
4. Niech p będzie liczbą naturalną dodatnią. Weźmy dowolnych p liczb całkowitych $a_1, \ldots, a_p$. Pokazać, że suma pewnych spośród tych liczb jest podzielna przez p.
5. Niech $a_1, \ldots, a_9$ będą nieujemnymi liczbami naturalnymi takimi, że $\Sigma a_i = 90$, czyli po prostu dziewięcioma liczbami, które sumują się do 90. Wykazać, że pewne trzy spośród tych liczb sumują się do co najmniej 30, a pewne cztery spośród nich sumują się do co najmniej 40.
6. Robin Hood strzelił z łuku siedem razy do okrągłej tarczy o promieniu jednego łokcia. Lady Marion oglądając popisy Robina stwierdziła, że każde dwie strzały spośród tkwiących w tarczy są oddalone od siebie o co najmniej łokieć. Wykazać, że Robin jedną ze strzał trafił w sam środek tarczy. (Oczywiście pewnikiem w tym zadaniu jest, że Robin każdą wystrzeloną strzałą trafił w tarczę.)
7. Na teście wyboru złożonym z 20 pytań obowiązywały takie zasady, że za zaznaczenie w danym pytaniu poprawnej odpowiedzi otrzymuje się 1 punkt, za zaznaczenie błędnej odpowiedzi otrzymuje się -1 punkt, a za pozostawienie pytania niezaznaczonego otrzymuje się 0 punktów. Pewien student zaznaczył jakąś odpowiedź w każdym pytaniu, po sprawdzeniu wyników okazało się, że otrzymał 15 punktów. Wykaż, że przy sprawdzaniu testu musiał wystąpić jakiś błąd.
8. Grupa uczniów usiadła wokół okrągłego stołu tak, że po obu stronach każdej dziewczyny siedzą chłopcy, a po obu stronach każdego chłopca siedzą dziewczyny. Pokazać, że w rozważanej grupie liczba dziewczyn jest równa liczbie chłopców.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

9. Wykazać, że jest niemożliwym, aby konik szachowy startując z danego pola przebył wszystkie pola szachownicy wymiaru n x n, każde z nich odwiedzając dokładnie raz oraz wracając na koniec na pole, z którego startował w przypadku, gdy n jest nieparzyste i większe niż 1.

10. Zbadać czy istnieją liczby niewymierne x i y takie, że x^y jest liczbą wymierną.

11. W grupie 15 osób jest 7, które gra na skrzypcach, 10, które gra na altówce i 6, które gra na wiolonczeli. Wśród tych osób 3 umie grać zarówno na skrzypcach i wiolonczeli. Tyle samo osób gra zarówno na skrzypcach, jak i altówce. W końcu 2 osoby grają na tych wszystkich trzech instrumentach. Ile osób w tej grupie umie grać na altówce i wiolonczeli? Zakładamy, że każda osoba z rozważanej grupy gra na co najmniej jednym z wymienionych instrumentów.

12. Ile jest liczb naturalnych dodatnich mniejszych od 70, które są względnie pierwsze z 70?

13. Na ile sposobów można otrzymać pięć kart z talii dwudziestu czterech tak, aby wśród nich był co najmniej jeden as, co najmniej jeden król, co najmniej jedna dama i co najmniej jeden walet?

14. Na ile sposobów można ustawić w ciąg cyfry 0,...,9 tak, aby pierwsza z nich była większa od 2, a ostatnia mniejsza od 9?

15. Ile jest liczb czterocyfrowych takich, które zawierają przynajmniej jedno 0, przynajmniej jedną 1 i przynajmniej jedną 2?

ROZWIĄZANIA

Uwaga! Zaglądanie na następne strony grozi zepsuciem zabawy z rozwiązywania zadań zawartych w tym zeszycie ćwiczeń :).

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

1. Ze zbioru {1,..., 2n} wybieramy n+1 różnych liczb. Pokazać, że zawsze wśród tych liczb znajduje się para liczb, których suma wynosi 2n + 1.

Wybieramy ze zbioru {1,..., 2n} dowolne n+1 różnych liczb $a_1,\ldots,a_{n+1}$
Rozważmy n szufladek S_i dla $i = 1,\ldots, n$. Na szufladce S_i napiszmy dwie liczby: i oraz $2n + 1 - i$. Te dwie liczby są różne, gdyż pierwsza z nich jest nie większa od n, a druga jest większa od n. Zauważmy też, że każda liczba ze zbioru {1,..., 2n} jest napisana na dokładnie jednej szufladce.
Umieśćmy teraz wybrane liczby $a_1,\ldots, a_{n+1}$ w szufladkach w ten sposób, że każda liczba trafia do tej szufladki, na której jest napisana. Liczb jest n + 1, a szufladek n, więc z zasady szufladkowej otrzymujemy, iż w pewnej szufladce Sj znajdują się dwie liczby. Zgodnie z regułą umieszczania liczb w szufladkach te liczby to j i $2n + 1 - j$, a przecież $j + (2n + 1 - j) = 2n+1$.

2. Ze zbioru {1,..., 2n} wybieramy n+1 różnych liczb. Pokazać, że zawsze wśród tych liczb znajduje się para liczb względnie pierwszych.

Wybieramy ze zbioru {1,..., 2n} dowolne n+1 różnych liczb $a_1,\ldots,a_{n+1}$.
Rozważmy n szufladek S_i dla $i = 1,\ldots ,n$. Na szufladce S_i napiszmy dwie liczby: $2i - 1$ oraz $2i$. Napisane liczby są różne i każda liczba ze zbioru {1,..., 2n} jest napisana na dokładnie jednej szufladce.
Umieśćmy teraz wybrane liczby w szufladkach w ten sposób, że każda liczba trafia do tej szufladki, na której jest napisana. Liczb jest n + 1, a szufladek n, więc z zasady szufladkowej otrzymujemy, iż w pewnej szufladce Sj znajdują się dwie liczby. Zgodnie z regułą umieszczania liczb w szufladkach te liczby to $2j-1$ i 2j.
Pokażemy, że te liczby są względnie pierwsze. Niech D będzie dowolnym wspólnym dzielnikiem obu liczb 2J-1 oraz 2J. Skoro tak, to D dzieli również różnicę tych liczb, czyli D dzieli 2J - (2J - 1) = 1. Jedynym dzielnikiem liczby 1 jest ona sama, a więc D = 1. Ale D było dowolnie wybranym dzielnikiem liczb 2j-1 oraz 2j, a więc 1 jest jedynym dzielnikiem tych liczb i tym samym są one względnie pierwsze. (Zauważmy, że powyższy argument będzie działał również wtedy, gdy rozważane dwie liczby będą postaci 2j i $2j$ + 1, po prostu prawdziwe jest ogólniejsze twierdzenie, że każde dwie kolejne liczby naturalne są względnie pierwsze.)

3. W pewnym sklepie znajduje się sześć słojów wypełnionych galaretkami w ośmiu kolorach. Jest dokładnie dwadzieścia galaretek w każdym kolorze. Wykaż, że istnieje słój, który zawiera co najmniej dwie galaretki w kolorze X i co najmniej dwie galaretki w kolorze Y dla pewnych dwóch różnych kolorów XI Y.

Słojów jest sześć, a galaretek w dowolnym, ustalonym kolorze K jest dwadzieścia, więc z zasady szufladkowej istnieje taki słój, który zawiera co najmniej dwie galaretki

w kolorze K. Niech C_k oznacza numer słoja, który zawiera co najmniej dwie galaretki w kolorze K. (Takich słojów może być więcej niż jeden, w takim wypadku C_k oznacza dowolny z nich.)
Mamy osiem liczb C_k - każdą dla innego koloru. Ale możliwych wartości dla tych liczb jest jedynie sześć, gdyż tyle jest słojów, a więc korzystając ponownie z zasady szufladkowej otrzymujemy, iż dwie spośród tych liczb są sobie równe, czyli istnieją dwa takie kolory X i Y, X≠ Y, że $C_X = C_Y =: J$. A to oznacza, że w jednym słoju, tym o numerze J, znajdują się co najmniej dwie galaretki w kolorze X i co najmniej dwie galaretki w kolorze Y.
(Dodatkowe zadanie: dla obu zastosowań zasady szufladkowej w powyższym rozwiązaniu, wskaż, które obiekty były szufladkami, a które skarpetkami.)

4. Niech P będzie liczbą naturalną dodatnią. Weźmy dowolnych P liczb całkowitych $a_1, \ldots, a_p$. Pokazać, że suma pewnych spośród tych liczb jest po dzielna przez P.

Weźmy P sum $A_1, A_1+A_2, \ldots, A_1+\ldots+A_P$ czyli sumy pierwszych I spośród wybranych liczb, gdzie I =1,... ,P. Rozważmy reszty z dzielenia tych sum przez P. Jeśli taka reszta z dzielenia przez P którejkolwiek z nich jest równa 0, to oznacza, że dana suma jest podzielna przez P. Załóżmy zatem, iż każda taka reszta jest różna od 0. To oznacza, że każda z nich należy do zbioru {1,... ,P — 1}. Ponieważ sum jest p, a możliwych reszt P — 1, zatem z zasady szufladkowej otrzymujemy, iż pewne dwie sumy, powiedzmy $a_1 + \ldots + a_i$ oraz $a_1 + \ldots + a_j$, gdzie $i < j$, dają taką samą resztę a przy dzieleniu przez p. To oznacza, że te sumy daje się przedstawić w postaci $a_1 + \ldots + a_i = k_i * p + a$ oraz $a_1 + \ldots + a_j = k_j * p + a$, gdzie k_iik_j są pewnymi liczbami całkowitymi. A tym samym

$$a_{i+1}+\ldots a_j=(a_1+\ldots a_j)-(a_1+\ldots+a_i)=(k_j*p + a)-(k_i * p + a)=(k_j-k_i)*p$$

co oznacza, że suma $a_{i+1} + \ldots + a_j$ jest po dzielna przez p.

5. Niech$a_1, \ldots, a_9$ będą nieujemnymi liczbami naturalnymi takimi, że, $\Sigma a_i = 90$ czyli po prostu dziewięcioma liczbami, które sumują się do 90. Wykazać, że pewne trzy spośród tych liczb sumują się do co najmniej 30, a pewne cztery spośród nich sumują się do co najmniej 40.

Każdą liczbę naturalną n możemy sobie wyobrażać jako pojemnik, w którym znajduje się dokładnie n piłeczek. Sumę danych liczb otrzymujemy wtedy wsypując piłeczki reprezentujące składniki do jednego pojemnika.
Rozważmy w ten sposób trzy pojemniki odpowiadające liczbom $a_1 + a_2 + a_3$, $a_4 + a_5 + a_6$ i $a_7 + a_8 + a_9$ w sumie w tych pojemnikach znajduje się dokładnie 90 piłeczek. Gdyby w każdym z rozważanych pojemników było mniej niż 30 piłeczek, to łącznie we wszystkich trzech pojemnikach było by co najwyżej 29 + 29 + 29 = 87 piłeczek, a jest przecież 90. Zatem w co najmniej jednym pojemniku znajduje się co najmniej

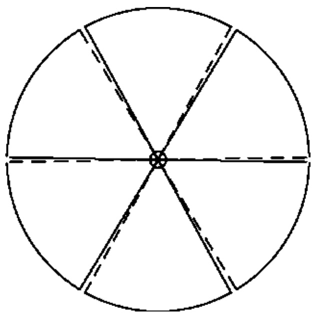
30 piłeczek (ostatni argument nazywa się uogólnioną zasadę szufladkową), a to oznacza, że pewne trzy spośród dziewięciu danych liczb (i to jeszcze trzy kolejne!) sumują się do co najmniej 30.
Aby rozwiązać drugą część zadania rozważymy następującą tabelkę:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_1
a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_1	a_2
a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_1	a_2	a_3

Znowu możemy sobie wyobrażać, że tabelka ta jest skrzynką, do której przegródek wsypano taką liczbę piłeczek, jaka liczba naturalna jest wpisana w danym miejscu tabelki.
Każdy wiersz tabelki sumuje się do 90, więc w całej naszej skrzynce znajduje się dokładnie 360 piłeczek. Gdyby w żadnej kolumnie naszej wyimaginowanej skrzynki nie było co najmniej 40 piłeczek, to w całej skrzynce było by co najwyżej 9 • 39 = 351 piłeczek. Stąd otrzymujemy, iż jest kolumna, w której znajduje się co najmniej 40 piłeczek (znowu uogólniona zasada szufladkowa), a to oznacza, że sumując liczby stojące w tejże kolumnie tabelki otrzymujemy w wyniku co najmniej 40.

6. Robin Hood strzelił z łuku siedem razy do okrągłej tarczy o promieniu jednego łokcia. Lady Marion oglądając popisy Robina stwierdziła, że każde dwie strzały spośród tkwiących w tarczy są oddalone od siebie o co najmniej łokieć. Wykazać, że Robin jedną ze strzał trafił w sam środek tarczy. (Oczywiście pewnikiem w tym zadaniu jest, że Robin każdą wystrzeloną strzałą trafił w tarczę).

Podzielmy koło stanowiące tarczę na siedem części. Jedną z nich stanowić będzie pojedynczy punkt - środek tarczy. Następnie wybierzmy na okręgu będącym brzegiem tarczy sześć punktów, które stanowią wierzchołki pewnego sześciokąta foremnego wpisanego w tenże okrąg. Pozostałe sześć części, na które dzielimy tarczę, stanowić będą wycinki koła zawarte między kolejnymi promieniami koła kończącymi się w wybranych wierzchołkach, przy czym jedynie pierwszy (licząc zgodnie ze wskazówkami zegara) z tych dwóch promieni będzie należał do danego wycinka (oczywiście nie licząc punktu będącego środkiem koła - on stanowi oddzielną część). Sposób podziału tarczy przedstawiony jest na rysunku.



Zauważmy, że w żadnej z tych części nie ma dwóch punktów, których odległość od siebie byłaby większa lub równa 1 łokciowi.
Gdyby Robin nie trafił żadną strzałą w środek tarczy, to siedem strzał utkwiło by w pozostałych częściach, na które podzieliliśmy tarczę. Tych części jest sześć, więc z zasady szufladkowej dwie strzały znalazły by się w jednej części. Tym samym odległość tych strzał od siebie byłaby mniejsza od 1 łokcia, a to stoi w sprzeczności z pomiarami Lady Marion, a zatem Robin musiał trafić jedną ze strzał w środek tarczy.

7. Na teście wyboru złożonym z 20 pytań obowiązywały takie zasady, że za zaznaczenie w danym pytaniu poprawnej odpowiedzi otrzymuje się 1 punkt, za zaznaczenie błędnej odpowiedzi otrzymuje się -1 punkt, a za pozostawienie pytania niezaznaczonego otrzymuje się 0 punktów. Pewien student zaznaczył jakąś odpowiedź w każdym pytaniu, po sprawdzeniu wyników okazało się, że otrzymał 15 punktów. Wykaż, że przy sprawdzaniu testu musiał wystąpić jakiś błąd.

Załóżmy, że student odpowiedział poprawnie na dokładnie i pytań, gdzie i jest pewną liczbą ze zbioru {0, ...,20}. Ponieważ zaznaczył odpowiedź w każdym pytaniu, to odpowiedzi nieprawidłowych było 20 — i. Tym samym liczba punktów zdobytych przez studenta wyniosła i — (20 — i) = 2i — 20 = 2(i — 10), czyli jest liczbą parzystą, a zatem niezależnie od liczby poprawnych odpowiedzi wynik 15 punktów nie jest możliwy.

8. Grupa uczniów usiadła wokół okrągłego stołu tak, że po obu stronach każdej dziewczyny siedzą chłopcy, a po obu stronach każdego chłopca siedzą dziewczyny. Pokazać, że w rozważanej grupie liczba dziewczyn jest równa liczbie chłopców.

Niech każdy chłopiec naleje soku koleżance, która siedzi po jego prawej stronie. Zauważmy, że każdy chłopiec nalał soku pewnej dziewczynie, gdyż po prawej stronie każdego chłopca siedzi dziewczyna z założeń naszego zadania. I to dokładnie jedna. Matematycznie mówiąc zdefiniowaliśmy pewną funkcję. Nie było również tak, że jedną dziewczynę obsługiwało dwóch lub więcej chłopców, bo tylko jeden chłopiec może mieć daną dziewczynę po swojej prawej stronie, czyli nasza funkcja jest różnowartościowa. W końcu każda dziewczyna jest przez kogoś obsługiwana, gdyż po lewej stronie każdej dziewczyny siedzi z założenia chłopiec, a z jego perspektywy rozważana dziewczyna siedzi po jego prawej stronie. A więc do tego nasza funkcja jest funkcją „na". Między dwoma zbiorami istnieje różnowartościowa funkcja z „na wtedy i tylko wtedy, gdy te zbiory mają tyle samo elementów, a więc w naszej rozważanej grupie musi być tyle samo chłopców co dziewczyn.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

9. Wykazać, że jest niemożliwym, aby konik szachowy startując z danego pola przebył wszystkie pola szachownicy wymiaru n x n, każde z nich odwiedzając dokładnie raz oraz wracając na koniec na pole, z którego startował w przypadku, gdy n jest nieparzyste i większe niż 1.

Zauważmy, iż każdy dozwolony ruch konika szachowego jest pomiędzy polami o różnym kolorze. Wyobraźmy sobie, że każde czarne pole na szachownicy reprezentuje jakiegoś chłopca, a białe dziewczynę. Załóżmy, że konik może przebyć całą szachownicę w opisany w zadaniu sposób. Posadźmy ludzi reprezentowanych przez pola szachownicy przy okrągłym stole zgodnie z tą trasą konika. Tzn. osobę reprezentowaną przez pole, z którego konik startuje sadzamy jako pierwszą, następnie osobę reprezentowaną przez pole, które konik odwiedza jako drugie, sadzamy po prawej stronie osoby posadzonej przy stole jako pierwsza. Z kolei z prawej strony tej drugiej osoby sadzamy osobę reprezentowaną przez trzecie pole odwiedzane przez konika itd. W końcu osobę, którą reprezentuje pole odwiedzane przez konika jako ostatnie przed powrotem na pole startowe sadzamy po prawej stronie osoby przedostatniej, ale że stół jest okrągły to osoba ta będzie siedziała również po lewej stronie osoby, która została posadzona przy stole jako pierwsza. Biorąc pod uwagę własność ruchów konika, którą rozważyliśmy na początku, to każdy tak usadzony chłopiec ma po obu swoich stronach dziewczynę, a każda dziewczyna po obu stronach chłopca. Z poprzedniego zadania otrzymujemy, że chłopców i dziewczyn jest tyle samo, co być nie może, gdyż na szachownicy nieparzystego wymiaru pól jednego koloru jest więcej niż drugiego.

10. Zbadać czy istnieją liczby niewymierne *x* i *y* takie, że x^y jest liczbą wymierną.

Jeśli liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest wymierna, to odpowiednie liczby istnieją *(x =y=√2).*
Jeśli ta liczba jest niewymierna, to podstawiając $x=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ oraz $y=\sqrt{2}$ dostajemy

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

a to oznacza ponownie, że żądane liczby niewymierne istnieją.

11. W grupie 15 osób jest 7, które gra na skrzypcach, 10, które gra na altówce i 6, które gra na wiolonczeli. Wśród tych osób 3 umie grać zarówno na skrzypcach i wiolonczeli. Tyle samo osób gra zarówno na skrzypcach, jak i altówce. W końcu 2 osoby grają na tych wszystkich trzech instrumentach. Ile osób w tej grupie umie grać na altówce i wiolonczeli? Zakładamy, że każda osoba z rozważanej grupy gra na co najmniej jednym z wymienionych instrumentów.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Oznaczmy przez S zbiór osób w naszej grupie, które umieją grać na skrzypcach. Niech A i W będą analogicznymi zbiorami dla altówki i wiolonczeli odpowiednio. Z danych zawartych w zadaniu otrzymujemy
$|S \cup A \cup W| = 15$, $|S| = 7$, $|A| = 10$, $|W| = 6$,
$|S \cap W| = 3$, $|S \cap A| = 3$ oraz
$|S \cap A \cap W| = 2$.
Szukamy $|A \cap W|$.
Z zasady włączeń i wyłączeń mamy

$$|S \cup A \cup W| = |S| + |A| + |W| - |S \cap A| - |S \cap W| - |A \cap W| + |S \cap A \cap W|.$$

Podstawiając odpowiednie wartości liczbowe dostajemy równanie, w którym jedyną niewiadomą jest nasza szukana

$$15 = 7 + 10 + 6 - 3 - 3 - |A \cap W| + 2,$$

a stąd otrzymujemy rozwiązanie $|A \cap W| = 4$.

12. Ile jest liczb naturalnych dodatnich mniejszych od 70, które są względnie pierwsze z 70?

Zauważmy, że 70 ma trzy dzielniki pierwsze - 2, 5 i 7. Niech Ai = {x €{1,...,70} : i|x}, czyli Ai jest zbiorem tych liczb naturalnych ze zbioru {1,..., 70}, które dzielą się przez I. Zbiór A_2 U A_5 U A_7 jest zbiorem liczb, które nie są względnie pierwsze z 70. Zatem jeśli od liczby wszystkich liczb naturalnych nie większych niż 70 odejmiemy liczność zbioru $\mathbf{A_2}$ U $\mathbf{A_5}$ U $\mathbf{A_7}$**,** to dostaniemy szukaną liczbę.
Z zasady włączeń i wyłączeń mamy

$$|A_2 \cup A_5 \cup A_7| =$$

$$= |A_2| + |A_5| + |A_7| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| + |A_2 \cap A_5 \cap A_7|.$$

Co druga liczba jest podzielna przez 2, a zatem $\mathbf{|A_2|}$ = 70/2 = 35. Co piąta liczba jest podzielna przez 5, a więc $|A_5|$ = 70/5 = 14. Na tej samej zasadzie $\mathbf{|A_7|}$ = 70/7 = 10.
Do zbioru $\mathbf{A_2 \cap A_5}$ należą te liczby, które są podzielne i przez 2, i przez 5, a zatem te liczby, które są podzielne przez 10. Tym samym $\mathbf{|A_2 \cap A_5|}$ **=** 70/10 = 7. Analogicznie $\mathbf{|A_2 \cap A_7|}$ **=** 70/14 = 5 oraz **|** $\mathbf{A_5 \cap}$ **Aj|** = 70/35 = 2. W końcu tylko 70 dzieli się jednocześnie przez 2, 5 i 7 wśród liczb nie większych niż 70, więc $\mathbf{|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = 1}$**.**
Podstawiając znalezione wartości do wzoru otrzymujemy

$$|A_2 \cup A_5 \cup A_7| = 35 + 14 + 10 - 7 - 5 - 2 + 1 = 46.$$

Stąd liczb naturalnych dodatnich mniejszych od 70, które są względnie pierwsze z 70 jest 70 — 46 = 24.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

13. Na ile sposobów można otrzymać pięć kart z talii dwudziestu czterech tak, aby wśród nich był co najmniej jeden as, co najmniej jeden król, co najmniej jedna dama i co najmniej jeden walet?

Niech **A** będzie zbiorem tych układów pięciu kart spośród dwudziestu czterech, w których nie ma żadnego asa. Niech zbiory **K, D** i **W** będą analogicznie zdefiniowane jak zbiór **A** dla króli, dam i waletów odpowiednio. Zbiór **A** U **K** U **D** U **W** składa się z tych układów, które nie zawierają przynajmniej jednej z figur, a tym samym jeśli od liczby wszystkich możliwych układów - ($^{2}{}_{5}{}^{4}$) - odejmiemy liczność tego zbioru, to otrzymamy szukaną liczbę.
Z zasady włączeń i wyłączeń mamy

$$|A \cup K \cup D \cup W| = |A| + |K| + |D| + |W| -$$

$$-|A \cap K| - |A \cap D| - |A \cap W| - |K \cap D| - |K \cap W| - |D \cap W| +$$

$$+|K \cap D \cap W| + |A \cap D \cap W| + |A \cap K \cap W| + |A \cap K \cap D| -$$

$$-|A \cap K \cap D \cap W|.$$

Liczność każdego ze zbiorów A, K, D i W wynosi , gdyż niezależnie od tego, którą figurę rozpatrujemy, to mamy do dyspozycji 20 kart, z których możemy już wybrać dowolny układ.
Podobnie liczność części wspólnej dwóch spośród naszych zbiorów wynosi $\binom{16}{5}$ niezależnie od tego którą część wspólną rozważamy. W każdym wypadku mamy dwie „zakazane" figury i tym samym odpada nam osiem kart.
Dalej, liczności części wspólnych trzech z naszych zbiorów wynoszą $\binom{12}{5}$, a czterech $\binom{8}{5}$.

Podstawiając te liczby do wzoru otrzymujemy

$$|A \cup K \cup D \cup W| = 4 \cdot \binom{20}{5} - 6 \cdot \binom{16}{5} + 4 \cdot \binom{12}{5} - \binom{8}{5} = 38920.$$

I ostatecznie układów, które zawierają co najmniej jednego asa, co najmniej jednego króla, co najmniej jedną damę i co najmniej jednego waleta jest

$$\binom{24}{5} - 38920 = 46088.$$

14. Na ile sposobów można ustawić w ciąg cyfry 0,...,9 tak, aby pierwsza z nich była większa od 2, a ostatnia mniejsza od 9?

Niech A będzie zbiorem tych ustawień cyfr, w których pierwsza cyfra jest nie większa niż 2, a B zbiorem tych ustawień cyfr, których ostatnia cyfra jest niemniejsza niż 9. Zbiór *AUB* jest zbiorem tych ustawień cyfr, które nie spełniają naszego warunku. Tym

samym szukaną przez nas liczbę otrzymamy odejmując od liczby wszystkich możliwych ustawień cyfr, czyli 10!, liczność zbioru *AUB.*
Z zasady włączeń i wyłączeń mamy $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. A biorąc pod uwagę, że $|A| = 3 * 9!$ (na pierwszą pozycję wstawiamy jedną z cyfr 0, 1 lub 2, a pozostałe dziewięć cyfr ustawiamy dowolnie), $|B| = 9!$ (tu na końcu musi stać cyfra 9, pozostałe dowolnie), a $|A \cap B| = 3 \cdot 8!$ (na końcu musi być 9, a na początku jedna z cyfr 0, 1 lub 2, pozostałe dowolnie) otrzymujemy odpowiedź $10! - 4 - 9! + 3 - 8! = 8! (90 - 36 + 3) = 40320 \cdot 57 = 2298240$.

15. Ile jest liczb czterocyfrowych takich, które zawierają przynajmniej jedno 0, przynajmniej jedną 1 i przynajmniej jedną 2?

Niech Ai, gdzie *i* = 0,1,2, będzie zbiorem tych liczb czterocyfrowych, które nie zawierają cyfry *i.* Zbiór $A_0 \cup A_1 \cup A_2$ jest zbiorem tych liczb czterocyfrowych, które nie zawierają przynajmniej jednej z cyfr, o które nam chodzi, zatem odejmując jego liczność od liczby wszystkich liczb czterocyfrowych otrzymamy odpowiedź na nasze pytanie.
Policzmy najpierw wszystkie liczby czterocyfrowe. Na pierwszym miejscu takiej liczby może stać każda cyfra poza 0, a na pozostałych trzech miejscach już zupełnie dowolna cyfra. Tym samym wszystkich liczb czterocyfrowych jest $9 \cdot 10^3 = 9000$.
Z zasady włączeń i wyłączeń mamy:

$$|A_0 \cup A_1 \cup A_2| =$$

$$= |A_0| + |A_1| + |A_2| - |A_0 \cap A_1| - |A_0 \cap A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_0 \cap A_1 \cap A_2|.$$

Rozumując analogicznie jak przy zliczaniu wszystkich liczb czterocyfrowych otrzymujemy, iż $|A_0| = 9^4 = 6561$, $|A_1| = |A_2| = 8 \cdot 9^3 = 5832$, $|A_0 \cap A_1| = |A_0 \cap A_2| = 8^4 = 4096$, $|A_1 \cap A_2| = 7 \cdot 8^3 = 3584$ oraz $|A_0 \cap A_1 \cap A_2| = 7^4 = 2401$. Podstawiając te liczby do wzoru otrzymujemy

$$|A_0 \cup A_1 \cup A_2| = 6561 + 2 \cdot 5832 - 2 \cdot 4096 - 3584 + 2401 = 8850.$$

Tym samym liczb spełniających warunki naszego zadania jest 9000 — 8850 = 150.

KOMPLETNY CHAOS JEST NIEMOŻLIWY

Jarosław Grytczuk

ZADANIA

1. Mamy 82 kolorowe kredki. Wykazać, że można wybrać spośród nich 10 kredek tego samego koloru, lub 10 kredek, z których każda jest innego koloru.
2. Na prostej zaznaczono 10 odcinków. Wykazać, że można wybrać 4 odcinki, które mają punkt wspólny, lub 4 odcinki parami rozłączne.
3. Brzeg trójkąta równobocznego pomalowano dowolnie używając dwóch kolorów. Wykazać, że istnieją trzy punkty w tym samym kolorze będące wierzchołkami trójkąta prostokątnego.
4. Wykazać, że w dowolnym kolorowaniu wszystkich punktów płaszczyzny trzema kolorami istnieją dwa punkty w odległości 1 w tym samym kolorze.
5. Na przyjęciu spotkało się sześć osób. Okazało się, że każda z nich ma wśród pozostałych dokładnie trzech znajomych. Wykazać, że pewne cztery z tych osób mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi dwoma znajomymi.

ROZWIĄZANIA

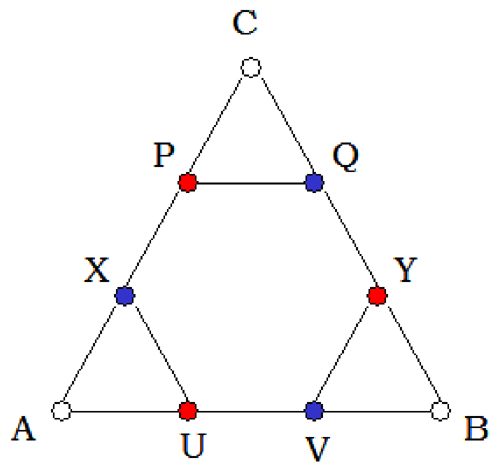
1. Pogrupujmy kredki tego samego koloru. Przypuśćmy, że w każdej grupie jest co najwyżej 9 kredek. Jeżeli różnych kolorów (grup) byłoby również co najwyżej 9, to mielibyśmy łącznie co najwyżej 81 kredek. Ale kredek jest 82. Zatem, albo jest co najmniej 10 kredek tego samego koloru, albo liczba różnych kolorów wynosi co najmniej 10.

2. Na początku wszystkie odcinki są szare. Rozważmy odcinek A, którego lewy koniec jest najdalej wysunięty na prawo. Pomalujmy ten odcinek na czerwono. Pomalujmy także na czerwono wszystkie odcinki, które przecinają odcinek A. Te czerwone odcinki mają punkt wspólny (jest nim na przykład lewy koniec odcinka A). Jeżeli czerwonych odcinków mamy co najmniej 4, to koniec zadania. Przypuśćmy więc, że są co najwyżej 3 czerwone odcinki i zapomnijmy o nich na chwilę. Niech B, będzie odcinkiem, którego lewy koniec jest najdalej na prawo wysunięty spośród wszystkich szarych odcinków. Pomalujmy odcinek B i wszystkie szare odcinki, które go przecinają na niebiesko. Podobnie jak poprzednio, albo mamy 4 niebieskie odcinki i koniec zadania, albo jest ich co najwyżej 3. Wówczas rozważmy szary odcinek C, którego lewy koniec jest wysunięty najdalej na prawo spośród pozostałych

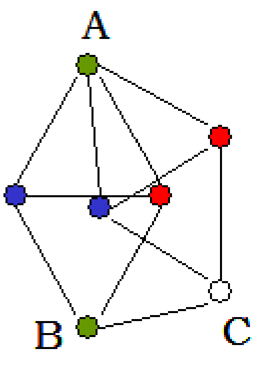
Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

szarych odcinków i pomalujmy ten odcinek na zielono, wraz ze wszystkimi odcinkami, które go przecinają. Jeżeli mamy 4 zielone odcinki, to koniec zadania. Przypuśćmy więc, że jest ich co najwyżej 3. Został wobec tego co najmniej jeden szary odcinek D. Wystarczy teraz zauważyć, że odcinki A, B, C, D są parami rozłączne, co kończy dowód.

3. Rozważmy dziewięć punktów na brzegu trójkąta – trzy wierzchołki A, B, C, i sześć punktów P, Q, X, Y, U, V tworzących sześciokąt foremny (rysunek 1a, 1b). Nietrudno przekonać się, że istnieją jedynie dwa istotnie różne sposoby pomalowania tego sześciokąta tak, aby uniknąć trójkąta prostokątnego (rysunki 1a, 1b). Na przykład punkty PQUV tworzą prostokąt, zatem żadne trzy z nich nie mogą być tego samego koloru. Podobnie rzecz się ma dla PVXY i QUXY. Jednak w obu tych sytuacjach, pomalowanie punktu A dowolnym kolorem utworzy jednobarwny trójkąt prostokątny – APU lub AQV.



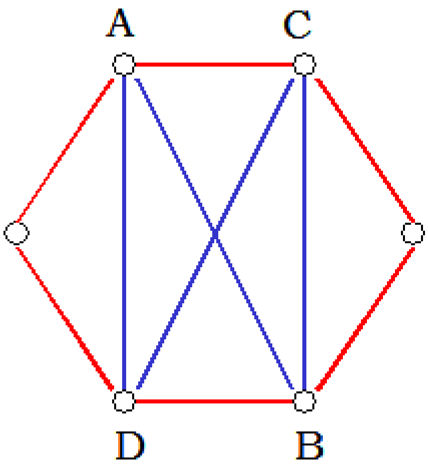
Rys. 1a



Rys. 1b

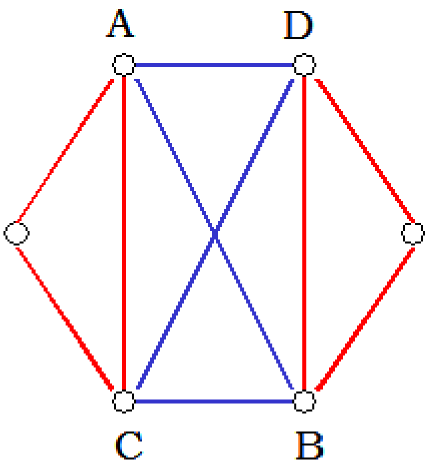
4. Rozważmy figurę składającą się z czterech trójkątów równobocznych o bokach jednostkowych, położonych tak aby odległość między punktami B i C wynosiła dokładnie 1 (rysunek 2). Dysponując jedynie trzema kolorami nie uda nam się pomalować tych pięciu punktów tak, aby uniknąć odcinka jednostkowego

o jednobarwnych końcach. W istocie, każdy z trójkątów musi być trójkolorowy, ale wtedy punkty B i C dostaną ten sam kolor.



Rys. 2

5. Wyobraźmy sobie, że te sześć osób znajduje się w wierzchołkach sześciokąta. Połączmy znajomych odcinkiem niebieskim a nieznajomych odcinkiem czerwonym. Skoro każda osoba zna dokładnie trzy inne osoby, to z każdego wierzchołka wychodzą trzy niebieskie i dwa czerwone odcinki. Istnieją tylko dwie możliwości rozmieszczenia czerwonych odcinków – albo w kształt pełnego sześciokąta, albo w dwa trójkąty (rysunki 3a i 3b). W obydwu przypadkach wierzchołki A, B, C, D tworzą cykl na niebieskich odcinkach czyniący zadość warunkowi zadania.



Rys. 3a

SZCZĘŚCIE, CAŁKA I NIESKOŃCZONOŚĆ

prof. Tadeusz Rzeżuchowski

1. Całka została określona jako graniczna wartość ciągu przybliżeń.

Sprecyzujmy ogólne pojęcie granicy dla ciągu liczb a_n. Na przykład dla ciągu $a_n=1/n$ jego granicą jest 0 - te liczby a_n wraz ze wzrostem n są coraz mniejsze, przybliżają się do zera, choć żadna z nich nigdy nie jest równa 0.

Definicja 0.1 *Liczba g nazywa się granicą ciągu a_n, jeśli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ przedział $[g - \varepsilon, g+\varepsilon]$ zawiera prawie wszystkie wyrazy tego ciągu, to znaczy wszystkie oprócz skończonej liczby.*

Mówi się wtedy też, że ciąg a_n jest zbieżny do liczby g, a zapisuje w taki sposób

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n$$

a) Spróbuj zinterpretować graficznie znaczenie definicji granicy ciągu:
   i. Interpretując ciąg jako kolejno pojawiające się punkty na osi liczbowej.
   ii. Interpretując ciąg jako funkcję, której argumentami są liczby naturalne, a wartości leżą na prostej liczbowej. Zastanów się jaki charakter ma wykres tej funkcji, jeśli ciąg jest zbieżny.

b) Podaj przykład ciągu, który nie ma granicy.

c) Zastanów się, czy jeśli ciąg a_n jest zbieżny do liczby g i dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$ jakiś wyraz tego ciągu należy do przedziału $[g - \varepsilon, G + \varepsilon]$, to wszystkie następne wyrazy też muszą do tego przedziału należeć.

d) Zastanów się, czy zaprzeczeniem stwierdzenia, że ciąg a_n jest zbieżny do liczby g jest zdanie, że ciąg a_n jest zbieżny do liczby różnej od g.

e) Spróbuj uzasadnić, że jeśli ciąg a_n jest zbieżny do a, ciąg b_n jest zbieżny do b, to ciąg $a_n + b_n$ jest zbieżny do $a + b$.

f) Spróbuj uzasadnić stwierdzenie, że jeśli ciąg $a_n + b_n$ jest zbieżny, to ciągi a_n i b_n niekoniecznie są zbieżne.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty
Al. Jerozolimskie 32 00-024 Warszawa

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

2. Zastanów się jak można zdefiniować zbieżność ciągu do +∞. A jak zbieżność do -∞?

a) Zastanów się czy zaprzeczeniem zdania „Ciąg jest zbieżny do +∞" jest zdanie „Ciąg jest zbieżny do -∞"

b) Jak uzasadnić, że jeśli ciąg jest zbieżny do +∞, to ciąg odwrotności wyrazów tego ciągu jest zbieżny do 0?

c) Czy jest prawdziwe, że jeśli wyrazy ciągu są różne od zera i ciąg ten jest zbieżny do 0, to ciąg odwrotności jest zbieżny do +∞?

3. Dodawanie nieskończenie wielu liczb *u1,u2,u3, ...* polega na tym, że tworzy się coraz dłuższe sumy

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 \\ S_2 &= u_1 + u_2 \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

i jeśli ciąg tych sum *S1*, *S2*, *S3*, . . . ma granicę, to tę granicę uważamy za sumę wszystkich liczb.
Mówi się też, że jest to suma szeregu o wyrazach *u1, u2, u3, ...*

(a) Uzasadnij, że suma liczb

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$$

istnieje i podaj jej wartość.
Wskazówka. Spróbuj rozłożyć ułamek *frac1n · (n + 1)* na różnicę dwóch ułamków i znajdź prosta reprezentacje skończonej sumy początkowych wyrazów.

(b) Uzasadnij, że suma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

jest nieskończona (suma odwrotności kolejnych liczb naturalnych.
Wskazówka. Uzasadnij nierówność

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}-1} + \frac{1}{2^{k+1}} > \frac{1}{2}$$

i wykorzystaj ją grupując wyrazy badanej sumy w taki sposób.

(c) Znajdź dziedzinę funkcji określonej w następujący sposób

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Jakim wzorem można tę funkcję opisać?
Czy naturalna dziedzina funkcji danej tym wzorem jest taka sama jak dziedzina funkcji f?

(d) Dla $x \in (-1, +1)$ znajdź wzór na sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

czyli

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$$

Wskazówka. Skorzystaj z takiej formy przedstawienia tej sumy

$$\begin{array}{lllllllll} x & + & & & & & & & \\ x^2 & + & x^2 & + & & & & & \\ x^3 & + & x^3 & + & x^3 & + & & & \\ x^4 & + & x^4 & + & x^4 & + & x^4 & + & \\ \vdots & & & & & & & & \end{array}$$

i wyznacz najpierw sumy w kolumnach.

4. Tak zwana funkcja Dirichleta jest określona w następujący sposób

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla x wymiernych} \\ 1 & \text{dla x niewymiernych} \end{cases}$$

Zastanów się dlaczego ta funkcja nie może mieć całki na żadnym przedziale [a, b].

5. Stwierdzanie równoliczności dwóch zbiorów *A, B*, czyli łączenie ich elementów w pary, można interpretować jako określanie odwzorowania

$$f : A \to B$$

Zastanów się jakie własności ma to odwzorowanie.

6. Zastanów się jak uzasadnić, że jeśli zbiór *A* jest równoliczny ze zbiorem *B*, a zbiór *B* jest równoliczny ze zbiorem *C*, to zbiór *A* jest równoliczny ze zbiorem *C*.

7. Zastanów się jak uzasadnić, że jeśli każdy ze zbiorów A_n jest skończony, to zbiór

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

do którego należą wszystkie punkty należące do chociaż jednego ze zbiorów A_n, jest przeliczalny lub skończony.
Czy rzeczywiście może się zdarzyć, że jest on skończony?

8. Zastanów się jak uzasadnić, że zbiór punktów sześcianu jest równoliczny ze zbiorem punktów dowolnej ze swoich krawędzi.
Wskazówka. Spróbuj podobnego sposobu jak przy dowodzeniu równoliczności kwadratu i boku.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

LICZBY WOKÓŁ NAS

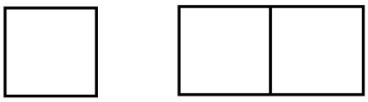
dr Barbara Roszkowska-Lech

LICZBY FIBONACCIEGO

Ciąg Fibonaciego

$f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, dla $n > 2$,

1. Na ile sposobów można ułożyć mozaikę na chodniku długości 1xn, gdy mamy do dyspozycji płytki kwadratowe 1x1 oraz prostokątne 1x2 (patrz rysunek)



Rozwiązanie. Oczywiste jest, że jeśli nasz chodnik ma długość 1, to mamy tylko jedną możliwość. (używamy płytki 1x1), a jeśli nasz chodnik ma długość 2, to mamy 2 możliwości: możemy użyć dwóch płytek 1x1 (1 sposób) lub jednej płytki 1x2. Oznaczmy liczbę możliwych ułożeń chodnika długości n przez C_n. Mamy $C_1=1$, $C_2=2$. Załóżmy, że mamy chodnik długości $n > 2$. Zobaczmy jaka jest ostatnia płytka. Mamy dwie możliwości: jeśli jest to płytka 1x1, to możliwych ułożeń jest C_{n-1}, a jeśli płytka 1x2 to takich ułożeń jest $C_{n-2.}$ Zatem chodnik długości n można ułożyć na $C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$. (Porównajmy ciąg C_nz ciągiem Fibonacciegof_n. Widać, że dla $n>1$, $C_n = f_{n+1}$).

2. Udowodnić, że $f_{n+3} = 1 + f_1 + f_2 + \dots + f_n + f_{n+1}$ dla $n>0$.

Rozwiązanie Z poprzedniego zadania wynika, że liczba f_{n+1} jest liczba możliwych ułożeń chodnika 1xn z płytek kwadratowych i prostokątnych. Zatem f_{n+3} to liczba możliwych ułożeń chodnika długości n+2. Wśród tych ułożeń jest tylko jedno składające się z samych kwadratów. W każdym innym ułożeniu jest co najmniej jeden prostokąt 1x2. Jeśli taki prostokąt jest ostatnią płytką na naszym chodniku to takich ułożeń jest tyle ile wynosi C_n, czyli f_{n+1}. Wybierzmy prostokąt, który znajduje się na naszym chodniku długości n+2 najbardziej na prawo (to znaczy na lewo od niego są tylko kwadraty) i policzmy ile jest możliwych ułożeń naszego chodnika. Za każdym razem liczba ta jest równa liczbie możliwych ułożeń chodnika z płytek leżących na lewo od naszego prostokąta. Sumujemy teraz wszystkie możliwe liczby ułożeń i dostaniemy nasz wzór.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

3. Udowodnić że $f_{n+k} = f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n$ dla n>0 i k>1.

Rozwiązanie. Znowu przyjrzyjmy się naszemu chodnikowi. Liczba f_{n+k} to liczba sposobów ułożenia chodnika długości n+k-1. Podzielmy nasz chodnik w na długości n. możliwe są dwa przypadki:

- Linia podziału nie przebiega przez prostokąt. Wtedy po lewej stronie linii podziału mamy chodnik długości n, a po prawej długości k-1. Takich możliwych ułożeń jest $f_k f_{n+1}$
- Linia podziału przebiega przez kostkę prostokątną. Wtedy po lewej stronie linii podziału mamy chodnik długości n-1, a po prawej długości k-2. Takich możliwych ułożeń jest $f_{k-1} f_n$.

Suma liczb uzyskanych w obu przypadkach jest równa f_{n+k}.

PODZIELNOŚĆ

4. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n, liczba $\frac{(3n+1)(n^3-3n^2+2n)}{12}$ jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie. Liczba $\frac{(3n+1)(n^3-3n^2+2n)}{12}$ jest liczbą naturalną wtedy tylko wtedy gdy 12 dzieli $(3n+1)(n^3 -3n^2 +2n)$. Oznaczmy $L_n = (3n+1)(n^3 -3n^2 +2n)$. Zauważmy, że $L_n = (3n+1)n(n-1)(n-2)$. Zauważmy ponadto, że liczba n(n-1)(n-2) jako iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest zawsze podzielna przez 6. Ponadto, jeśli n jest liczbą parzystą to liczba ta jest podzielna przez 4, a więc L_n jest podzielna przez 12. Załóżmy więc, że n jest liczbą nieparzystą. Wtedy liczba 3n+1 jest parzysta a więc znowu L_n jest podzielna przez 12.

5. Niech n będzie liczba całkowitą większą od 1. Udowodnij, że
   a. 2^n jest sumą dwóch kolejnych liczb nieparzystych,
   b. 3^n jest suma trzech kolejnych liczb całkowitych.

Wskazówki a) Dwie kolejne liczby nieparzyste są postaci 2k -1 oraz 2k +1, dla dowolnego k.. Załóż, że $2^n = (2k-1) + (2k+1)$ i oblicz k. Zawsze daje się obliczyć!
b) Podobnie, trzy kolejne liczby całkowite to k-1, k, k+1, dla dowolnego k. Oblicz k, jeśli $3^n = (k-1) +k + (k-1)$.

6. Niech k będzie liczba parzystą. Czy możliwe jest przedstawienie 1 jedynki za pomocą sumy odwrotności k nieparzystych liczb całkowitych?

Rozwiązanie. Pytamy, czy istnieje k nieparzystych liczb naturalnych $n_1, n_2, \ldots, n_k$ takich, że $1 = \frac{1}{n_1} + \ldots + \frac{1}{n_k}$. Załóżmy, że takie liczby istnieją. Oznacza to, że $n_1 n_2 \ldots n_k = s_1 + \ldots + s_k$, gdzie wszystkie liczby s_i są nieparzyste. Jest ich parzyście wiele (k), a więc ta suma jest parzysta. Lewa strona tej równości jest liczbą nieparzystą. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że nie można przedstawić jedynki w żądany sposób.

7. **Jaś wybrał pięć liczb ze zbioru {1,2,3,4,5,6,7}, obliczył ich iloczyn i podał Zosi. Zosia chciała wiedzieć, czy suma wybranych liczb jest parzysta czy nie. Okazało się, że znajomość iloczynu nie wystarczyła do rozstrzygnięcia tego problemu. Jaki jest iloczyn pięciu wybranych przez Jasia liczb?**

Rozwiązanie. Zauważ, że znajomość iloczynu pięciu wybranych liczb jest równoważna ze znajomością iloczynu dwóch pozostałych liczb. Jakie liczby można przedstawić na więcej niż jeden sposób jako iloczyn liczb z naszego zbioru? Są dwie takie liczby 12 = $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$, oraz $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$. W drugim przypadku suma dwóch niewybranych liczb jest nieparzysta, a więc suma wybranych jest również nieparzysta. Zatem zachodzi pierwszy przypadek, czyli zatem iloczyn pięciu wybranych liczb jest równy $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7}{12} = 420$.

8. **Smok ma 1000 głów. Rycerz może jednym cieciem obciąć 21 lub 33 lub 14 lub 1 głowę. Smokowi odrasta natychmiast odpowiednio 51, 0 , 11 lub 103 głowy. Smok zostaje zabity gdy wszystkie głowy zostają ścięte. Czy rycerz może zabić smoka?**

Rozwiązanie Nie. Po każdej akcji rycerza liczba głów smoka nie zmienia reszty z dzielenia przez 3. (Sprawdź sam) Rycerzowi udało by się zabić smoka, gdyby reszta z dzielenia przez 3 liczby 1000 była równa 0. A tak nie jest.

9. **Udowodnić , że liczba n= 10a+b jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy liczba a -2b jest podzielna przez 7. Stosując udowodnioną własność sprawdzić, czy liczba 648186 jest podzielna przez 7.**

Rozwiązanie Zauważmy, że liczba (10a +b) + 4(a-2b) = 14a -7b jest zawsze podzielna przez 7. Jeśli oznaczymy m= a-2b to zawsze liczba k = n+4m jest liczbą podzielną przez 7. Jeśli teraz 7 dzieli m to 7 dzieli n=k-4m. Podobnie jeśli 7 dzieli n to dzieli też 4m = k-n, a ponieważ 4 i 7 są względnie pierwsze to 7 dzieli m. Aby sprawdzić podzielność przez 7 liczby 648186 obliczamy: 64818 -2·6 = 64806, 6480- 2$\cdot 6 = 6468$, 646 -2$\cdot 8$ = 630. Liczba 630 = 7·90, a więc 648186 jest również podzielna przez 7.

LICZBY PIERWSZE

10. ***Udowodnić, że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci 4k-1, czyli dających resztę 3 z dzielenia przez 4.**

Rozwiązanie (szkic). Zauważmy, że taka liczba pierwsza istnieje (3 jest taką liczbą) Spróbujmy powtórzyć z lekką modyfikacją rozumowanie Euklidesa. Przypuśćmy, że $A = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi dającymi resztę 3 z dzielenia przez 4. Niech $M = 4p_1p_2\dots p_k - 1$. Liczba M daje resztę 3 z dzielenia przez 4 i liczba ta ma jakiś dzielnik pierwszy. Dowolna liczba pierwsza daje resztę 1 lub 3 z dzielenia przez 4 (Dlaczego?). Gdyby wszystkie pierwsze dzielniki liczby M miały resztę 1 z dzielenia przez 4 to liczba M również dałaby przy dzieleniu przez 4 resztę 1. (Dlaczego?) Wniosek: liczba M ma dzielnik pierwszy p, który przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3. Ale liczba p nie należy do zbioru A, bo żadna z liczb ze zbioru A nie dzieli liczby M. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci 4k-1.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KRZYWIZNA NA PŁASZCZYŹNIE I W PRZESTRZENI

dr Mariusz Zając

ZADANIA

1. Pasażer pociągu jadącego ze stałą prędkością 120 km/h zauważył, że w ciągu minuty i 30 sekund kierunek jazdy zmienił się z północnego na północno-wschodni. Zakładając, że ten odcinek toru jest łukiem okręgu, obliczyć jego promień.

Rozwiązanie.
Pociąg przejechał drogę $l = vt$ = 3 km. W tym czasie kierunek jazdy zmienił się o 45°, czyli $a = \pi/4 rad$. Ponieważ $l = Ra$, to

$$R = \frac{l}{\alpha} = \frac{12}{\pi}\ \mathrm{km} \approx \mathbf{3820}\ \mathrm{m}.$$

2. Obliczyć przyspieszenie odśrodkowe działające na pociąg, o którym mowa w poprzednim zadaniu.

Rozwiązanie.
Stosujemy wzór

$$a = kv^2 = \frac{v^2}{R} = \frac{33\frac{1}{3}^2}{3820}\left[\frac{(\mathrm{m/s})^2}{\mathrm{m}}\right] \approx \mathbf{0,29}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

3. Przyspieszenie ziemskie na poziomie morza wynosi na równiku około 9,78 m/s2, a na biegunie około 9, 832 m/s2. Jaką część tej różnicy stanowi przyspieszenie odśrodkowe związane z ruchem obrotowym Ziemi? Jaki inny czynnik wywołuje tę różnicę?

Rozwiązanie.
Dla punktu P położonego na równiku skorzystamy ze wzoru $a = v^2/R$. Prędkość v łatwo oszacować, pamiętając że w ciągu jednej doby punkt P pokonuje cały obwód Ziemi, co daje przybliżoną wartość

$$v \approx \frac{40000\ \mathrm{km}}{24\ \mathrm{h}} \approx 463\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Mazowiecki Kurator Oświaty · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Korzystając z tablic podających dokładniejsze wartości promienia równika (6378,2 km), jego obwodu (40075 km) i okresu obrotu Ziemi wokół osi (86164,1 s), otrzymamy:

$$v \approx \frac{40075 \text{ km}}{86164,1 \text{ s}} \approx 465,1 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$a = \frac{v^2}{R} \approx \frac{465,1^2}{6378200} \left[\frac{(\text{m/s})^2}{\text{m}}\right] \approx \mathbf{0,0339} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Widać więc, że przyspieszenie odśrodkowe odpowiada za 2/3 omawianej różnicy. Drugim istotnym czynnikiem jest spłaszczenie Ziemi - nie jest ona w rzeczywistości kulą, a punkt na równiku znajduje się około 20 km dalej od środka Ziemi niż biegun.

4. Oszacować, z jaką prędkością musiałby poruszać się po powierzchni Ziemi pojazd, aby mógł się od niej oderwać w wyniku działania siły odśrodkowej.

Rozwiązanie.
Załóżmy, że pojazd porusza się po równiku. Gdyby Ziemia nie obracała się wokół własnej osi, przyspieszenie ziemskie na równiku wynosiłoby zgodnie z wynikiem poprzedniego zadania $g \approx 9,78 + 0,034 = 9,814$ m/s^2.

$$\frac{v^2}{R} = g,$$

Aby przyspieszenie odśrodkowe zrównoważyło się z ziemskim, musi zachodzić równość

$$v = \sqrt{g \cdot R} \approx \mathbf{7912} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Wynik ten odpowiada standardowo podawanej wartości tzw. pierwszej prędkości kosmicznej, czyli najmniejszej prędkości, którą trzeba nadać ciału, aby stało się satelitą Ziemi. Zauważmy jednak, że dokonaliśmy tu pewnych uproszczeń, w szczególności zaniedbaliśmy ruch obrotowy ziemi. W związku z tym faktyczna prędkość potrzebna do oderwania się pojazdu od Ziemi będzie mniejsza o 465 m/s od powyższej wartości przy starcie w kierunku wschodnim, a większa przy starcie w kierunku zachodnim. Będzie ona też większa na biegunie, gdyż zarówno przyspieszenie *g* (o czym była mowa w poprzednim zadaniu), jak i promień *R* (ze względu na spłaszczenie Ziemi) są tam większe niż na równiku.

5. W południe pewnego słonecznego dnia okazało się, że cień metrowego pręta ustawionego pionowo w Gdańsku osiągnął długość 75,4 cm, po czym zaczął się

ponownie wydłużać. Dokładnie w tej samej chwili w położonych 450 km na południe Gliwicach minimalna długość cienia takiego samego pręta wyniosła 64,9 cm. Na podstawie tych danych obliczyć promień Ziemi.

Rozwiązanie.
Stosunek wysokości pręta do długości cienia jest tangensem wysokości Słońca nad horyzontem. Zatem

$$\operatorname{tg} \alpha_{Gd} = \frac{1}{0,754} \approx 1,326,$$

$$\alpha_{Gd} \approx 52,98^{\circ},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{Gl} = \frac{1}{0,649} \approx 1,541,$$

$$\alpha_{Gl} \approx 57,02^{\circ}.$$

Różnica a_{Gl} — a_{Gd} jest zarazem różnicą szerokości geograficznych omawianych punktów, gdyż zgodnie z warunkami zadania leżą one na jednym południku, a więc

$$\frac{\alpha_{Gl} - \alpha_{Gd}}{360^{\circ}} = \frac{d}{2\pi R}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy

$$R \approx 6393 \text{ km}.$$

6. (zadanie eksperymentalno-problemowe)

a) Znaleźć szkołę znajdującą się w odległości kilkuset kilometrów, w miarę możliwości dokładnie w kierunku północnym lub południowym, i przeprowadzić wspólny eksperyment opisany w zadaniu 5.

b) Przy współudziale nauczycieli (matematyki i fizyki, być może również geografii) zastanowić się, jak dokładny jest wynik uzyskany tą metodą.

Rozważyć np. następujące czynniki:

- niedokładność pomiaru długości pręta,
- niedokładność pomiaru długości cienia,
- trudność dokładnego ustalenia, kiedy cień jest najkrótszy,
- różnicę między prawdziwym południem słonecznym a godziną 12 czasu urzędowego,
- trudność dokładnego wyznaczenia kierunku południowego,
- odchylenie pręta od pionu,

- odchylenie powierzchni, na którą pada cień, od poziomu,
- przesunięcie na linii wschód-zachód pomiędzy szkołami - punktami pomiarowymi,
- niedokładność pomiaru odległości między tymi punktami,
- różnicę w wysokości nad poziomem morza pomiędzy szkołami,
- odchylenie kształtu Ziemi od idealnej kuli (spłaszczenie),
- inne (jakie?)

Które z powyższych czynników są nieistotne lub pomijalne, a które szczególnie ważne? Jak (jeśli to możliwe) je zredukować lub uwzględnić ich wpływ?

7. Rozważmy następujące dwa punkty na kuli ziemskiej:

A - o szerokości geograficznej 60° N i długości geograficznej 30° E (okolice Petersburga w Rosji);

B - o szerokości geograficznej 60° N i długości geograficznej 150° W (okolice Anchorage na Alasce).

Obliczyć odległość między A i B:

a) drogą lotniczą, jeśli samolot porusza się stale na zachód;
b) drogą lotniczą, jeśli samolot porusza się stale na wschód;
c) najkrótszą możliwą drogą lotniczą.

Rozwiązanie.

a) i b) Oba omawiane punkty leżą na równoleżniku 60°, a różnica ich długości geograficznych to 180°. Zatem niezależnie od kierunku (na wschód lub na zachód) przelecieć należy połowę obwodu tego równoleżnika. Obwód równika to około 40000 km, obwód równoleżnika 6 wynosi *cos* 60° • 40000 = 20000 km, ostatecznie więc odległość AB równa jest **10000** km.

c) Zauważmy (np. używając globusa), że środek ziemi O, biegun północny N oraz punkty A i B leżą na
jednej płaszczyźnie, która dzieli Ziemię na połowy wzdłuż koła wielkiego ograniczonego południkami 30°E i 150°W. Wynika stąd, że najkrótsza droga łącząca po powierzchni Ziemi punkty A i B prowadzi przez biegun N, a jej długość to 1/6 całego obwodu Ziemi, czyli 1/6 • 40000 ≈ **6667** km.

8. Załóżmy, że jest technicznie możliwe przewiercenie przez Ziemię tunelu łączącego w prostej linii punkty A i B, o których mowa w poprzednim zadaniu.

a) Jaka byłaby długość takiego tunelu?
b) Jak głęboko pod powierzchnią ziemi znajdowałby się jego środek?

Rozwiązanie.

a) Analizując przekrój, o którym mowa w rozwiązaniu zadania 7c), widzimy bez trudu, że trójkąt OAB (O - środek Ziemi) jest równoramienny, a kąt przy wierzchołku O to 60°. OAB jest więc trójkątem równobocznym, więc AB=OA=R =40000/ 2π ≈ **6366** km.

b) Odległość środka odcinka AB od środka Ziemi O wynosi *sin* 60° • *R* = √3/2•*R,*

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) R \approx \mathbf{853}\ \mathrm{km}.$$

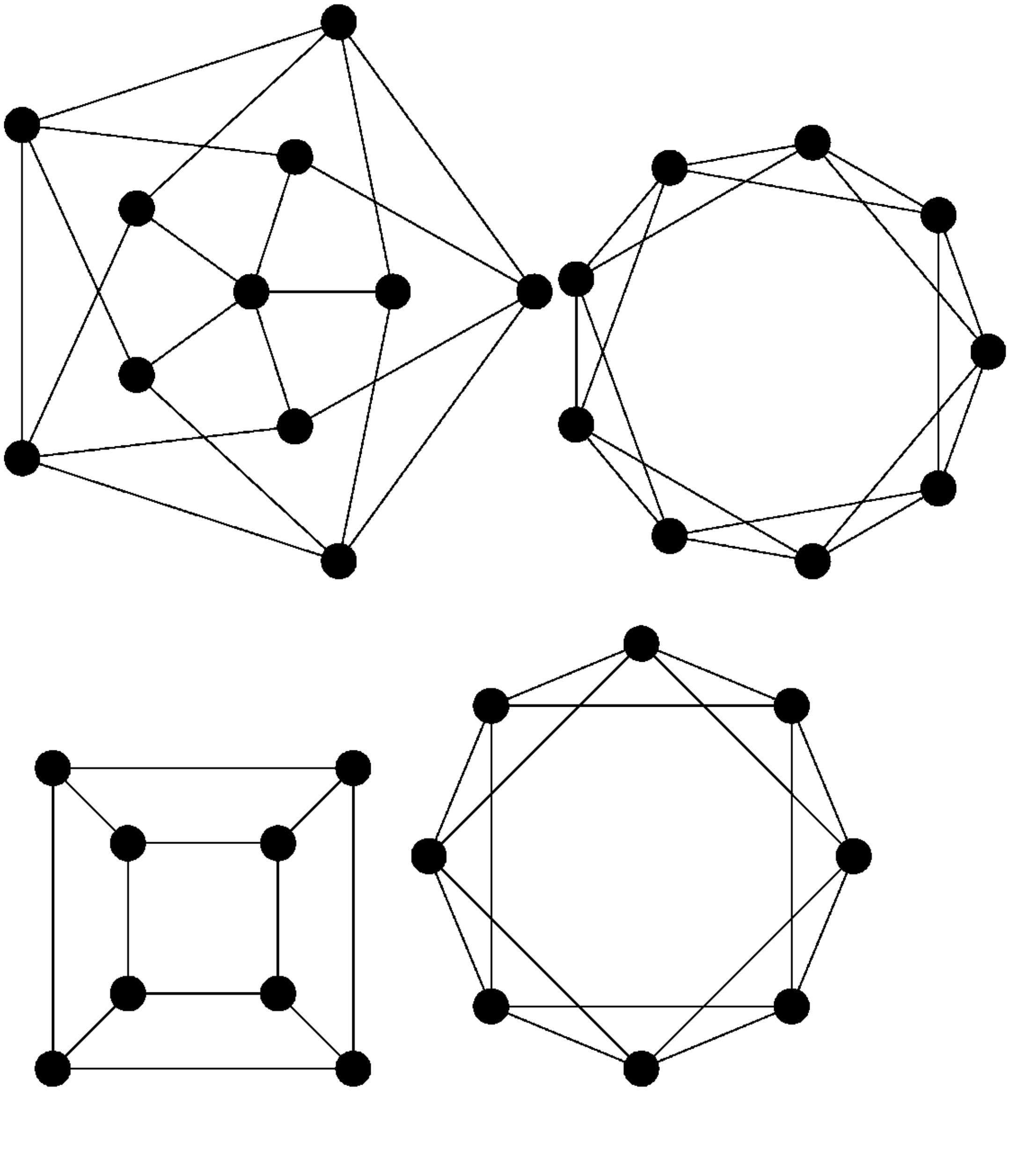
zatem jego odległość od powierzchni to

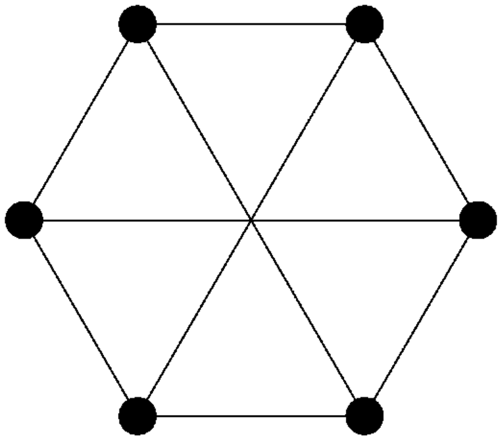
KOLOROWANIE JAKO NARZĘDZIE UNIKANIA KONFILKTÓW

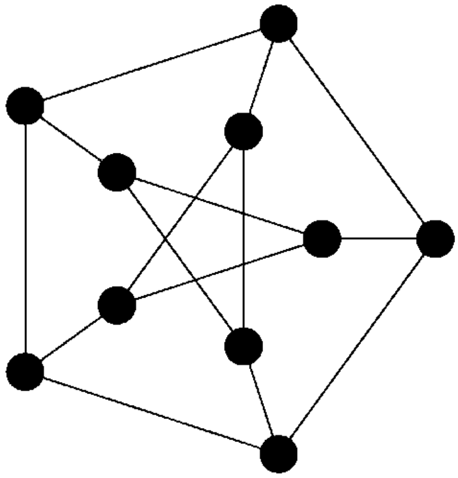
dr Konstanty Junosza – Szaniawski

ZADANIA

1. Znaleźć liczbę chromatyczną podanych grafów:







2. Wykazać, że w planarnym grafie bez trójkątów o n ≥ 3 wierzchołkach jest co najwyżej 2n — 4 krawędzi.

3. Pokazać, że jeśli w grafie płaskim o n wierzchołkach najkrótszy cykl wynosi $k \geqslant 3$ to $e(G) \leqslant \frac{k(n-2)}{k-2}$.

4. Wykazać, że dwa ostatnie grafy z zadania 1 nie są planarne.

5. Wykazać, że w grafie planarnym bez trójkątów minimalny stopień nie przekracza 3.

6. Wykazać (nie korzystając z twierdzenia o czterech kolorach), że jeśli planarny graf G nie zawiera trójkąta to χ(G) ≤ 4.

Wskazówki

1. Znaleźć pokolorowanie grafów na najmniejszą możliwą liczbę kolorów oraz podać argument, dla którego mniej kolorów nie wystarcza.

2. Skorzystać z Formuły Eulera: n — e + f = 2 i faktu, że każda ściana jest ograniczona przez cykl długości co najmniej cztery czyli 2e ≥ 4f.

3. Skorzystać z Formuły Eulera i faktu, że 2e ≥ *k* • *f*.

4. Porównać liczbę krawędzi z ograniczeniami z zadania 1 i 2.

5. Skorzystać z nierówności z zadania 1 i wzoru $2e = \sum_{v \in V} \deg v$.

6. Znaleźć ograniczenie na liczbę kolorów użytych przez algorytm zachłanny zastosowany do ciągu wierzchołków, który można skonstruować dzięki nierówności z zadania 4.

Odpowiedzi

1. 4, 3, 2, 4, 3, 2.
2. Każda ściana jest ograniczona przez co najmniej 4 krawędzie, przy czym każda krawędź leży na brzegu co najwyżej dwóch ścian. Zatem podwojona liczba krawędzi wynosi co najmniej 4 razy liczba ścian: 2e $\geq$ 4f. Jeśli z formuły Eulera *n* — *e* + *f* = 2 wyznaczymy liczbę ścian *f* = 2 — *n* + 2, wstawimy do poprzedniej nierówności i uprościmy, to otrzymamy *e* $\leq$ 2n — 4.
3. Zadanie można rozwiązać podobnie do poprzedniego z tą różnicą, że każda ściana jest ograniczona przez przynajmniej k krawędzi. Zatem mamy nierówność 2e $\geq$ *k* • *f.* Po wstawieniu *f* = 2 — *n* + e, z formuły Eulera otrzymujemy
$$e(G) \leqslant \frac{k(n-2)}{k-2}.$$
4. Pierwszy graf nie zawiera trójkątów, zatem można skorzystać z nierówności z zadania 1. Graf planarny o 6 wierzchołkach może mieć co najwyżej 2 • 6 — 4 = 8 krawędzi. Rozważany graf ma 9 krawędzi, więc nie jest planarny.
   Drugi graf ma talię (długość najkrótszego cyklu) równą 5. Graf planarny o talii 5 i 10 wierzchołkach ma co najwyżej
$$5(10-2)/3 = 13\tfrac{1}{3}$$
   krawędzi. Graf z rysunku ma 15 krawędzi więc nie jest planarny.
5. Szacujemy sumę stopni z dwóch stron, Z jednej strony jest co najmniej równa minimalnemu stopniowi pomnożonemu przez liczbę wierzchołków. Z drugiej strony jest równa podwojonej liczbie krawędzi. Korzystamy z nierówności na liczbę krawędzi w planarnym grafie bez trójkątów i otrzymujemy:
$$n\delta(G) \leqslant \sum_{v \in V} \deg v \leqslant 4n - 8.$$
$$\delta \leqslant 4 - \frac{8}{n}.$$
   Minimalny stopień jest liczbą całkowitą, zatem ostatecznie *δ(G)* $\leq$ 3.

6. Dzięki nierówności z zadania 4 wiemy, że w grafie planarnym bez trójkątów istnieje wierzchołek stopnia co najwyżej 3. Usuńmy go z grafu. Otrzymamy nowy

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

graf planarny bez trójkątów. Ten graf również będzie zawierał wierzchołek stopnia co najwyżej 3, Usuńmy go. Postępujemy tak dalej aż usuniemy cały graf wierzchołek po wierzchołku. Teraz pokolorujmy początkowy graf w kolejności odwrotnej do usuwania, przydzielając każdemu wierzchołkowi najmniejszy możliwy kolor. Każdy wierzchołek w momencie usuwania był stopnia co najwyżej 3 to znaczy, że gdy go kolorujemy ma co najwyżej trzech pokolorowanych sąsiadów, czyli co najwyżej 3 kolory nie dozwolone. Jeśli mamy do dyspozycji cztery kolory to jeden z nich jest dostępny i możemy ten wierzchołek pokolorować, W ten sposób wszystkie wierzchołki grafu możemy pokolorować. Zatem liczba chromatyczna grafu planarnego bez trójkątów nie przekracza 4.

INWERSJA NA PŁASZCZYZNIE

Andrzej Fryszkowski
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechnika Warszawska

Literatura:

H.S.M. Coxeter, Wstep do Geometrii Dawnej i Nowej, PWN 1967.
V. Prasolov, Problems in Plane and Solid Geometry (Internet).

Zadania:

1. Opisać analitycznie inwersję .
2. Zbadać, jakie mogą być obrazy okręgu i prostej do niego stycznej w inwersji względem okręgu O(S, r).
3. Wykazać, że okręgi styczne O_1 i O_2 przechodzą w inwersji względem okręgu O = O(S, r) albo na okręgi styczne albo na okrąg i prostą do niego styczną albo na parę prostych równoległych.
4. Wykazać, że jeżeli proste k i l przecinają się pod kątem α, to obrazy tych prostych w inwersji względem okręgu O(S, r) też przecinają się pod kątem α.
5. Wykazać, że jeżeli okręgi O_1 i O_2 przecinają się pod kątem α, to obrazy tych okręgów w inwersji względem okręgu O (S, r) też przecinają się pod kątem α.
6. Wykazać, że jeżeli okręgi O_1 i O_2 przecinają się pod kątem 90°, to ich obrazy w inwersji względem okręgu O (S, r) też przecinają się pod kątem 90°.
7. Niech okręgi O_1 i O_2 będą do siebie prostopadłe. Wykazać, że wtedy okrąg O_2 przechodzi na siebie w inwersji względem O_1.
8. Wykorzystując pojęcie inwersji wykazać twierdzenie Ptolemeusza: *Niech* PQRS *będzie czworokątem wpisanym w okrąg. Wtedy*
$$|PR| \cdot |QS| = |PQ| \cdot |RS| + |QR| \cdot |SP| .$$
9. Okręgi O_1,..., O_n są styczne do rozłącznych okręgów S_1 i S_2. Ponadto O_1 jest styczny do O_2 w punkcie A_1, O_2 jest styczny do O_3 w punkcie A_2, ... , O_{n-1} jest styczny do O_n w punkcie A_{n-1}. Wykazać, że punkty A_1 ..., A_{n-1} leżą na jednym okręgu.

10. Wykazać następujące twierdzenie Feuerbacha:
Okrąg przechodzący przez środki boków trójkąta jest styczny do okręgu wpisanego i do trzech okręgów dopisanych.

Rozwiązania

1. Opisać analitycznie inwersję.

Rozwiązanie:
Rozważmy w układzie *0xy* inwersje O (S, r), gdzie S = (p, q). Dowolny punkt A = (x,y) ≠ S przechodzi na taki punkt A' = (x',y') ∈ l_{SA}, że |SA| • |SA '| = r^2. Istnieje zatem t ≥ 0, takie, że x ' = p + t (p — x) oraz y' = q + t (q — y). Stąd:

$$r^2 = |SA| \cdot |SA'| = t\left((p-x)^2 + (q-y)^2\right)$$

co oznacza, iż:

$$t = \frac{r^2}{(p-x)^2 + (q-y)^2}.$$

Otrzymujemy więc analityczny wzór na inwersję

$$\begin{cases} x' = p + \frac{r^2(p-x)}{(p-x)^2+(q-y)^2}, \\ y' = q + \frac{r^2(q-y)}{(p-x)^2+(q-y)^2}. \end{cases}$$

2. Zbadać, jakie mogą być obrazy okręgu i prostej do niego stycznej w inwersji względem okręgu O (S, r).

Rozwiązanie:
Niech dany będzie okrąg O_1 = O (A, R) oraz prosta k styczna do O_1 w punkcie P. Aby zbadać obrazy inwersyjne O_1 i k musimy rozważyć 4 przypadki:

a) $S = P$;
b) $S \neq P$ i $S \in O_1$.
c) $S \neq P$ i $S \in k$.
d)$S \notin (O_1 \cup k)$.

Ad a). Niech B będzie drugim końcem średnicy zawierającej A i P. Obrazem prostej k jest ona sama, a obrazem okręgu O_1 - prosta O_1' przechodząca przez B ' (jest różny od P) i prostopadła do AB. W takim razie O_1' || k.

Ad b) Ponieważ S ∉ k to obrazem prostej k jest taki okrąg k' = O (B, R_1) zawierający S i P', że l_{sb} ⊥ k. Obrazem okręguO₁ jest prosta O_1' przechodząca przez P' i prostopadła do l_{AS}. Ponieważ $O_1 \cap k = \{P\}$, to $O' \cap k' = \{P'\}$, to prosta O ' jest styczna do okręgu k ' w punkcie P '.

Ad c). Obrazem prostej k jest ona sama, a obrazem okręgu O_1 - okrąg $O_1' = O(A', R')$ przechodzący przez P '. Ponieważ okrąg O ' powstaje w jednokładności o środku S (i odpowiedniej skali), to prosta k jest do niego styczna w punkcie P .

Ad d). Ponieważ $S \notin (O_1 \cup k)$ to obrazem prostej k jest taki okrąg $k' = O(B, R_1)$ zawierający S i P', że $l_{SB} \perp k$. Z kolei obrazem okręgu O_1 jest okrąg $O_1' = O(A', R')$ przechodzący przez P', w jednokładności o środku S (i odpowiedniej skali) do O_1 i taki, że $l_{SP} \perp l_{A'P'}$.

3. Wykazać, że okręgi styczne O_1 i O_2 przechodzą w inwersji względem okręgu O = O (S, r) albo na okręgi styczne albo na okrąg i prostą do niego styczną albo na parę prostych równoległych.

Rozwiązanie:

Niech P będzie punktem styczności okręgów $O_1 = O(A_1, R_1)$ i $O_2 = O(A_2, R_2)$, a k prostą do nich styczną . Należy rozpatrzyć kilka przypadków.

Jeśli P = S to prosta k jest prostopadła do $l_{A1,A2}$. Dlatego obrazy inwersyjne O_1' i O_2' są prostymi prostopadłymi do $l_{A1,A2}$, a więc są do siebie równoległe.

Jeśli P = S i $S \in O1 \cup O2$, to niech np. $S \in O_1$ i $S \in O_2$. Wtedy okrąg O_1 przechodzi na prostą O_1' przechodzącą przez P' i prostopadłą do l_{A1P} , a okrąg O_2 na okrąg O_2' zawierający P' i nie przechodzący przez S. Ponieważ $O1 \cap O2 = \{P\}$, to $O1' \cap O2' = \{P'\}$, a więc prosta O_1' jest styczna do okręgu O_2' w punkcie P'.

Jeśli $S \notin O_1 \cup O_2$, to okrąg O_1 przechodzi na okrąg O_1' zawierający P', którego średnica leży na prostej l_{A1S}, a okrąg O_2 na okrąg O_2 zawierający P', którego średnica leży na prostej l_{A2S}. Okręgi O_1' i O_2' powstają z jednokładności względem S (w odpowiedniej skali). Ponieważ $O_1 \cap O_2 = \{P\}$ to również $O_1' \cap O_2' = \{P'\}$, a więc okręgi O_1' i O_2'są styczne w punkcie P'.

4. Wykazać, że jeżeli proste *k i l* przecinają się pod kątem α, to obrazy tych prostych w inwersji względem okręgu O(S, r) też przecinają się pod kątem α.

Rozwiązanie:
Niech proste k i l przecinają się w punkcie P. Zachodzi kilka przypadków.
Jeśli P = S to obrazami inwersyjnymi prostych *k i l* są one same, a więc kąt jest zachowany. Załóżmy więc, że $P \neq S$.
Jeśli $S \in k \cup l$, to niech np. $S \in k$ oraz $S \notin l$. Wtedy obrazem *k* jest ona sama, a obrazem *l* - okrąg przechodzący przez *S*, bez punktu *S*, przy czym jego średnica leży na prostej l_1 prostopadłej do *l*. Zatem proste *k* i l_1 przecinają się pod kątem $90^0 - \alpha$. Okrąg $l' \cup \{S\}$ ma z prostą *k* dokładnie dwa punkty wspólne S i P '. Stąd

$l' \cap k = \{P'\}$. Z twierdzenia o kącie dopisanym, kąt pomiędzy styczną do l' w punkcie P', a prostą k wynosi $90^0 - (90° - \alpha) = \alpha$.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy $S \notin k \cup l$. Niech k_1 i l_1 będą prostymi prostopadłymi, odpowiednio, do k i l, przechodzącymi przez S. kąt pomiędzy k_1 i l_1 też wynosi α. Zbiory $k' \cup S$ i $l' \cup S$ są okręgami przechodzącymi przez S. Oznaczmy ich środki, odpowiednio, K_1 i L_1. Wtedy $K_1 \in k_1$ oraz $L_1 \in l_1$. Drugim punktem przecięcia się okręgów $k' \cup S$ i $l' \cup S$ jest punkt P'. Kąt pomiędzy stycznymi k_2 i l_2 do, odpowiednio, k' i l' w punkcie P' jest taki sam jak $\sphericalangle K_1P'L_1$. Zatem wynosi on:

$$\sphericalangle K_1P'L_1 = \sphericalangle K_1P'S + \sphericalangle SP'L_1 = \sphericalangle K_1SP' + \sphericalangle P'SL_1 = \alpha.$$

5. Wykazać, że jeżeli okręgi O_1 i O_2 przecinają się pod kątem α, to obrazy tych okręgów w inwersji względem okręgu O (S, r) też przecinają się pod kątem α.

Rozwiązanie:
Jeśli $\alpha = 0$ tzn. okręgi O_1 i O_2 są styczne, powiedzmy w punkcie P. Wtedy, na mocy Zadania 3, obrazy O_1 i O_2 są do siebie styczne, czyli przecinają się pod kątem 0.
Niech $\alpha > 0$, a okręgi O_1 i O_2 przecinają się w punkcie P (drugim jest Q). Oznaczmy przez k_1 i k_2 proste styczne, odpowiednio, do O_1 i O_2. Wtedy obrazy k'_1 i k'_2 są styczne, odpowiednio, do O1 i O2. Ponieważ k_1 i k_2 przecinają się pod kątem α, więc z Zadania 4 wynika, że ich obrazy k'_1 i k'_2 też przecinają się pod kątem α.

6. Wykazać, że jeżeli okręgi O_1 i O_2 przecinają się pod kątem 90°, to ich obrazy w inwersji względem okręgu O (S, r) też przecinają się pod kątem 90°.

Rozwiązanie:
Jest to wniosek z Zadania 5 dla $\alpha = 90°$.

7. Niech okręgi O_1 i O_2 będą do siebie prostopadłe. Wykazać, że wtedy okrąg O_2 przechodzi na siebie w inwersji względem O_1.

Rozwiązanie:
Niech $O_1 = O(S_1,r_1)$ i $O_2 = O(S_2,r_2)$. Wtedy potęga punktu S_1 względem O_2 wynosi $p = r_2$. Obraz inwersyjny okręgu O_2 powstaje w jednokładności o środku S_1 i skali

$$\frac{r_1^2}{p} = \frac{r_1^2}{r_1^2} = 1,$$

a więc okrąg O2 przechodzi na siebie.

8. Wykorzystując pojęcie inwersji wykazać twierdzenie Ptolemeusza:
Niech PQRS będzie czworokątem wpisanym w okrąg. Wtedy

$$|PR| \cdot |QS| = |PQ| \cdot |RS| + |QR| \cdot |SP|.$$

Rozwiązanie:
Niech okrąg O = O (A, r) będzie opisany na czworokącie PQRS. Rozważmy inwersję względem S i o promieniu r. Wtedy obrazem okręgu O jest prosta k przechodząca przez A i prostopadła do l_{SA}. Z definicji inwersji mamy zależności:

$$|SP| = \frac{r^2}{|SP'|}, |SQ| = \frac{r^2}{|SQ'|}, |SR| = \frac{r^2}{|SR'|}.$$

Ponadto, z Twierdzenia 1 wynika, iż:

$$\begin{aligned} |PQ| &= |P'Q'| \cdot \frac{|SQ|}{|SP'|} = \frac{r^2 \cdot |P'Q'|}{|SQ'| \cdot |SP'|} \\ |RQ| &= |R'Q'| \cdot \frac{|SQ|}{|SR'|} = \frac{r^2 \cdot |R'Q'|}{|SQ'| \cdot |SR'|}, \\ |RP| &= |R'P'| \cdot \frac{|SP|}{|SR'|} = \frac{r^2 \cdot |R'P'|}{|SP'| \cdot |SR'|}. \end{aligned}$$

Równość, którą mamy udowodnić sprowadza się zatem do zależności

$$\frac{r^2 \cdot |R'P'|}{|SP'| \cdot |SR'|} \cdot \frac{r^2}{|SQ'|} = \frac{r^2 \cdot |P'Q'|}{|SQ'| \cdot |SP'|} \cdot \frac{r^2}{|SR'|} + \frac{r^2 \cdot |R'Q'|}{|SQ'| \cdot |SR'|} \cdot \frac{r^2}{|SP'|}.$$

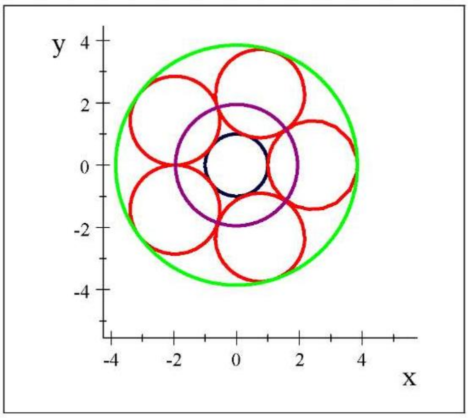
Przekształcając równoważnie otrzymujemy równość

$$|R'P'| = |P'Q'| + |R'Q'|,$$

która jest prawdziwa.

9. Okręgi O_1, ..., O_n są styczne do rozłącznych okręgów S_1 i S_2. Ponadto O_1 jest styczny do O_2 w punkcie A_1, O_2 jest styczny do O_3 w punkcie A_2, ... , O_{n-1} jest styczny do O_n w punkcie A_{n-1}. Wykazać, że punkty A_1,..., A_{n-1} leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:
Z Twierdzenia 2 (z wykładu) wynika, że okręgi S_1 i S_2 można przekształcić inwersyjnie na okręgi współśrodkowe S_1' i S_2' o środku w pewnym punkcie S. W tej inwersji okręgi O_1',...,O_n' są styczne do S_1' i S_2', a więc muszą być takie same (rysunek poniżej). W takim razie punkty styczności A_1',..., A_{n-1}' leżą na pewnym okręgu O o środku w punkcie S. Stosując tę inwersję jeszcze raz wnioskujemy, że punkty A_1,..., A_{n-1} leżą na okręgu O' o środku w punkcie S'.



9. Wykazać następujące twierdzenie Feuerbacha:
Okrąg przechodzący przez środki boków trójkąta jest styczny do okręgu wpisanego i do trzech okręgów dopisanych.

Rozwiązanie:
Oznaczmy długości boków trójkąta ΔABC przez a = |BC|, b = |CA| i c = |AB| oraz niech p =(a+b+c)/2. Niech A_1, B_1 i C_1 będą środkami boków BC, CA i AB, odpowiednio. Bez ograniczania ogólności możemy rozpatrzeć tylko przypadek, gdy okrąg opisany na $\Delta A_1B_1C_1$ jest styczny do okręgu S wpisanego w ΔABC i do okręgu dopisanego S_a stycznego do BC. Niech B' i C' będą punktami symetrycznymi względem dwusiecznej ∢A, odpowiednio do, B i C. Wtedy B'C' jest drugą styczną do okręgów S i S_a. Niech P i Q będą punktami styczności okręgów S i S_a, odpowiednio, z prostą BC, a D i E niech będą punktami przecięcia, odpowiednio, prostych A_1B_1 i A_1C_1 z prostą $l_{B'C'}$. Wtedy BQ = CP = p - c i dlatego $A_1P = A_1Q$ = ½ |b — c|. Wystarczy teraz udowodnić, że inwersja o środku A_1 i promieniu $|A_1P|$ przeprowadza punkty B_1 i C_1, odpowiednio na, punkty D i E. W inwersji tej bowiem S i S_a są przekształcane na siebie, a okrąg opisany na $\Delta A_1B_1C_1$ przechodzi na prostą $l_{B'C'}$. Niech K będzie środkiem odcinka CC'. Punkt K leży na prostej l_{A1B1}oraz

$$A_1K = \frac{BC'}{2} = \frac{b-c|}{2} = A_1P.$$

Ponadto

$$A_1D : A_1K = BC' : BA = A_1K : A_1B_1,$$

a to oznacza, że

$$A_1D \cdot A_1B_1 = |A_1K|^2 = |A_1P|^2.$$

Podobnie

$$A_1E \cdot A_1C_1 = |A_1P|^2.$$

To zaś daje tezę.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

GEOMETRIA JEST PROSTA

prof. Krzysztof Chełmiński

Zadanie 1.

Na płaszczyźnie dane są 4 parami nierównoległe proste l_1, l_2, l_3, l_4 oraz punkt O nie należący do żadnej z tych prostych. Znajdź punkty $A_i \in l_i$ dla i = 1, 2, 3, 4 takie, że czworokąt $A_1A_2A_3A_4$ jest równoległobokiem, którego środkiem symetrii jest punkt O.

Rozwiązanie

Zadane proste zawierają boki czworokąta wypukłego $P_1P_2P_3P_4$. Grupujemy zadane proste w dwie pary. Pierwsza para to proste P_1P_2 i P_3P_4 oraz druga para to proste P_1P_4 i P_2P_3. Za każdym razem bierzemy parę prostych zawierających przeciwległe boki tego czworokąta. Do prostych P_1P_2 i P_3P_4 oraz punktu O stosujemy zadanie z wykładu, tzn. znajdujemy na tych prostych takie punkty A_1 i A_3, aby punkt O był środkiem odcinka A_1A_3. W tym celu wystarczy przekształcić prostą P_1P_2 w symetrii środkowej względem punktu O i punkt przecięcia się tego obrazu z prostą, P_3P_4 wyznacza punkt A_3. Punkt A_1 jest obrazem A_3 w tej symetrii. W ten sposób znajdujemy jedną przekątną poszukiwanego czworokąta. Następnie postępujemy podobnie z parą prostych P_1P_4 i P_2P_3 oraz z punktem *O* i znajdujemy drugą przekątną A_2A_4 równoległoboku. Wprost z definicji punktów A_i dla i = 1, 2, 3, 4 widzimy, że czworokąt $A_1A_2A_3A_4$ jest równoległobokiem, którego środkiem symetrii jest rzeczywiście punkt O.

Zadanie 2

Dany jest kąt wypukły α o wierzchołku P oraz odcinki o długościach t i a. Poprowadzić prostą, która odetnie od kąta trójkąt PAB o obwodzie 2t taki, że AB = a.

Rozwiązanie

Konstrukcja poprowadzenia wymaganej w zadaniu prostej jest związana z następującym dodatkowym zadaniem:

Dane są dwa okręgi rozłączne o_1, o_2 o promieniach $r_1 < r_2$. Niech k i l będą wspólnymi stycznymi zewnętrznymi do obu tych okręgów (tzn. takimi stycznymi, że oba okręgi leżą po tej .samej stronie stycznej). Styczne te przecinają się w punkcie P. Oznaczmy punkty styczności prostej k z o_1 i o_2 przez A i B oraz punkty styczności l z o_1 i o_2 przez C i D. Wspólna styczna wewnętrzna m do danej pary okręgów (tzn. taka styczna, że dane okręgi leżą po różnych stronach tej stycznej) przecina k i l w punktach K i L odpowiednio. Wykaż, że KL = AB.

Rozwiązanie
Oznaczmy punkty styczności m z okręgami przez E i F. Z najmocniejszego twierdzenia geometrii mamy KF = KB oraz KA = KE. Wystarczy więc wykazać, że KE = FL. Jednakie ponownie z najmocniejszego twierdzenia geometrii mamy AB = 2KE + EF oraz CD = 2FL + EF i stąd, że AB = CD otrzymujemy tezę zadania dodatkowego.
Wracamy do zadania 2. Opierając sie na zadaniu dodatkowym przeprowadzamy następującą konstrukcję: na obu ramionach kąta odkładamy od wierzchołka odcinki długości t i otrzymujemy punkty B i D. Z otrzymanych punktów odkładamy w kierunku do wierzchołka odcinki o długości a (z warunków zadania wynika, że a < t). Otrzymujemy punkty A i C. Rysujemy okręgi styczne do ramion kąta w punktach B, D i A, C. Wspólna styczna wewnętrzna odcina od ramion kąta trójkąt o zadanych własnościach.

Zadanie 3.

Niech AB i CD będą nieprzecinającymi się cięciwami danego okręgu o. Znajdź kąt pomiędzy AC i BD.

Rozwiązanie
Zakładamy, że AC i BD się przecinają. Odpowiedz w tym zadaniu zalety od tego, czy punkt przecięcia się tych prostych leży wewnątrz czy na zewnątrz okręgu. Rozwalmy pierwszy przypadek. Oznaczmy punkt przecięcia się prostych AC i BD przez P. Widzimy, że poszukiwany kąt jest kątem zewnętrznym w trójkącie PBC przy wierzchołku P. Jest więc równy sumie dwóch kątów wewnętrznych tego trójkąta przy wierzchołkach B i C. Stąd miara tego kąta jest równa sumie kątów wpisanych opartych na łukach AB i CD. W przypadku gdy P leży na zewnątrz okręgu rozumując analogicznie otrzymujemy, że poszukiwany kąt jest równy rojnicy kątów wpisanych opartych na łukach AB i CD.

Zadanie 4.

Wykaż, że dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta ABC są wysokościami trójkąta o wierzchołkach będących punktami przecięcia się dwusiecznych z okręgiem opisanym na tym trójkącie.

Rozwiązanie
Niech A', B', C' będą punktami przecięcia się dwusiecznych kątów A, B, C z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Nalepy wykazać, że prosta AA' jest prostopadła do prostej B 'C'. Niech P będzie punktem przecięcia się tych prostych. kąt wewnętrzny trójkąta PA'C' przy wierzchołku C' jest kątem wpisanym w okrąg opartym na sumie luków B'C i CA'. Natomiast kąt wewnętrzny tego trójkąta przy wierzchołku A' jest kątem wpisanym w okrąg opartym na luku C'A. Stąd, że suma wszystkich kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° mamy, że suma luków B'C, CA' i C'A jest połowa

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

okręgu. Tak więc suma kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A' i C' wynosi 90°, co jest równoważne stwierdzeniu, że kąt trójkąta PA'C' przy wierzchołku P jest prosty.

Zadanie 5

Wykaż, że symediana CK *dzieli postawę* AB *trójkąta w stosunku* $(AC)^2 : (BC)^2$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez M środek boku AB. Z twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkątów ACM oraz MBC mamy

$$\frac{AC}{\sin\angle AMC} = \frac{AM}{\sin\angle ACM}, \quad \frac{MB}{\sin\angle MCB} = \frac{CB}{\sin\angle BMC}.$$

Stąd, że AM = MB oraz sin ∠AMC = sin ∠BMC otrzymujemy równość AC sin ∠ACM = CB sin ∠MCB. Podobnie stosując twierdzenie sinusów do trójkątów ACK oraz KBC mamy

$$\frac{AK}{\sin\angle ACK} = \frac{AC}{\sin\angle AKC}, \quad \frac{KB}{\sin\angle KCB} = \frac{CB}{\sin\angle BKC}.$$

Ponownie zauważając, że sin ∠AKC = sin ∠BKC oraz, że ∠ACK = ∠MCB, ∠ACM = ∠BCK dostajemy

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{CB}\,\frac{\sin\angle ACK}{\sin\angle BCK} = \left(\frac{AC}{CB}\right)^2.$$

Zadanie 6

Wykaż, że jeżeli AK jest symedianą w trójkącie ABC to styczne do okręgu opisanego na tym trójkącie w punktach B i C oraz AK są współpękowe.

Rozwiązanie

Niech D będzie punktem przecięcia się stycznych do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punktach B i C. Oznaczmy przez M środek odcinka BC. Na przedłużeniu boku AB znajdujemy taki punkt X, aby ∠DXB = ∠DBX. Niech Y będzie punktem przecięcia się prostych XD i AC. Z konstrukcji punktu X trójkąty ABC i AYX są podobne. Stąd ∠DYC = ∠CBA oraz trójkąty XDA i CMA są podobne. Z tego podobieństwa wynika, że ∠BAD = ∠CAM. Oznacza to, że AD jest symedianą i punkt przecięcia AD z bokiem BC musi być punktem K.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

PIERWSZE KROKI W ŚWIECIE FRAKTALI

dr Agnieszka Badeńska

ĆWICZENIE 1. Oblicz pole trójkąta Sierpińskiego.

Konstrukcję trójkąta Sierpińskiego zaczynamy od trójkąta jednostkowego, tj. równobocznego o boku równym 1, który nazwiemy T_0. Jego pole wynosi więc:

$$P(T_0) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

W pierwszym kroku dzielimy trójkąt jednostkowy na cztery trójkąty dwa razy mniejsze od wyjściowego i usuwamy środkowy. Powstała w ten sposób figura T_1 składa się z trzech trójkątów o boku równym i, zatem jej pole wynosi:

$$P(T_1) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

W drugim kroku powtarzamy tę operację (tj. podział na cztery mniejsze trójkąty i usunięcie środkowego) dla każdego z mniejszych trójkątów, otrzymując dziewięć trójkątów o boku równym 1/4. Tę figurę oznaczymy T_2, ma ona pole:

$$P(T_2) = 9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Zaczynamy już dostrzegać pewną zależność. Po wykonaniu n kroków, zbiór T_n będzie się składał z 3^n trójkątów o boku długości

$$\frac{1}{2^n}$$

zatem jego pole będzie wynosić:

$$P(T_n) = 3^n \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Trójkąt Sierpińskiego T_∞ jest efektem nieskończenie wielu takich kroków, zatem musimy się zastanowić jak zachowuje się pole kolejnych zbiorów, kiedy n dąży do nieskończoności (co oznaczamy $n\to\infty$). Widzimy, że kiedy n rośnie, wówczas $P(T_n)$ maleje, ponieważ czynnik $(3/4)^n$ staje się coraz mniejszy (jest to ciąg geometryczny o ilorazie mniejszym od 1), a drugi czynnik jest stały. Zatem, gdy n dąży do nieskończoności, $P(T_n)$ dąży do zera, co możemy zapisać w następujący sposób:

$$P(T_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Z tego wynika, że pole trójkąta Sierpińskiego wynosi zero.

ĆWICZENIE 2. Oblicz objętość gąbki Mengera.

Aby obliczyć objętość tego zbioru, przyjrzyjmy się najpierw jego konstrukcji. Przez K_0 oznaczmy sześcian o krawędzi długości 1. Podzielmy go teraz na trzykrotnie mniejsze sześciany - będzie ich dwadzieścia siedem - i usuńmy po jednym ze środka każdej ściany, a także ten stanowiący środek całej bryły (w sumie siedem sześcianów). W ten sposób otrzymamy zbiór Ki składający się z 20 sześcianów o krawędzi długości 1/3. Krok drugi polega na powtórzeniu tej procedury dla każdego z mniejszych sześcianów, zatem K_2 będzie złożony z 20^2 sześcianów o krawędzi długości 1/9. Aby uzyskać gąbkę Mengera K_∞, procedurę tę powtarzamy w nieskończoność, przy czym w n-tym kroku zbiór K_n składa się z 20^n sześcianów o krawędzi długości $(1/3)^n$. Przyjrzyjmy się objętościom poszczególnych zbiorów.

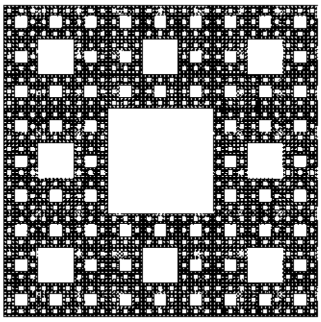
$$
\begin{aligned}
V(K_0) &= 1^3 = 1,\\
V(K_1) &= 20 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{20}{27},\\
V(K_2) &= 20^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \left(\frac{20}{27}\right)^2,\\
&\vdots\\
V(K_n) &= 20^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^3 = \left(\frac{20}{27}\right)^n.
\end{aligned}
$$

Widzimy natychmiast, że gdy n rośnie, wówczas objętość $V(K_n)$ maleje (ciąg geometryczny o ilorazie mniejszym od 1), zatem

$$V(K_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Czyli objętość gąbki Mengera wynosi zero.

ĆWICZENIE 3. Przyjrzyj się uważnie zbiorowi umieszczonemu na poniższym rysunku.



Dywan Sierpińskiego

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Opisz jego konstrukcję na dwa sposoby: metodą „podziel i usuń" oraz przy pomocy rodziny funkcji - postaraj się wypisać ich wzory.

Konstrukcję dywanu Sierpińskiego zaczynamy od kwadratu. Analizując rysunek widzimy, że z początkowego kwadratu usuwane są kolejno mniejsze kwadraty. Szczególną uwagę zwraca środkowy „otwór", który jest trzy razy mniejszy niż pierwotny kwadrat. Tym samym wyłania nam się zarys konstrukcji tego zbioru.
Wyjściowy kwadrat dzielimy na dziewięć kwadratów trzy razy mniejszych i usuwamy środkowy. Pozostaje nam osiem kwadratów i do każdego z nich stosujemy naszą procedurę: dzielimy na trzy razy mniejsze kwadraty i usuwamy środkowy. Powtarzając tę operację nieskończenie wiele razy otrzymujemy dywan Sierpińskiego.
Teraz, tę samą konstrukcję wyrazimy przy pomocy funkcji. Z naszych rozważań wynika, że w pierwszym kroku konstrukcji wyjściowy kwadrat musimy zastąpić ośmioma kwadratami trzy razy mniejszymi, ułożonymi dookoła środkowego kwadratu, który został usunięty. Będziemy zatem potrzebowali ośmiu funkcji typu „zmniejsz trzy razy i przesuń w odpowiednie miejsce".
Aby móc wypisać wzory tych funkcji, umieścimy nasz zbiór w układzie współrzędnych. Przypuśćmy, że zaczynamy od kwadratu jednostkowego, leżącego w pierwszej ćwiartce. Jego wierzchołki będą miały współrzędne (wymieniając przeciwnie do ruchu wskazówek zegara): (0, 0), (1, 0), (1,1) i (0,1). Naszym celem jest wypisanie wzorów ośmiu funkcji, z których każda przekształca nasz jednostkowy kwadrat na jeden z małych kwadratów. Ponumerujmy te osiem małych kwadratów, nadając numer 1 kwadratowi leżącemu w lewym dolnym rogu i dalej poruszając się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.
Poszukiwane przez nas funkcje są postaci „zmniejsz trzy razy i przesuń w odpowiednie miejsce. Rozważmy więc na początek funkcję, która po prostu zmniejsza trzy razy:

$$f((x,y)) = \left(\frac{1}{3}x,\ \frac{1}{3}y\right).$$

Zobaczmy co się stanie z wierzchołkami naszego kwadratu pod działaniem funkcji f:

$$f((0,0)) = (0,0), \quad f((1,0)) = \left(\frac{1}{3},0\right), \quad f((1,1)) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), \quad f((0,1)) = \left(0,\frac{1}{3}\right).$$

Zatem funkcja f przekształca wyjściowy kwadrat jednostkowy dokładnie na kwadrat oznaczony przez nas numerem 1. Tym samym znaleźliśmy wzór pierwszej funkcji.
Pozostałe kwadraty uzyskamy przesuwając kwadrat numer 1 w odpowiednie miejsce. Wy-starczy zatem abyśmy teraz sprawdzili współrzędne lewego dolnego rogu wszystkich kwadratów, dowiemy się tym samym o jaki wektor należy przesunąć pierwszy kwadrat, tj. jak zmieni się wzór funkcji. Tym samym otrzymamy wzory wszystkich ośmiu funkcji:

$$f_1((x,y)) = \left(\frac{1}{3}x,\ \frac{1}{3}y\right),$$
$$f_2((x,y)) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}y\right),$$
$$f_3((x,y)) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}y\right),$$
$$f_4((x,y)) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}\right),$$
$$f_5((x,y)) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\right),$$
$$f_6((x,y)) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\right),$$
$$f_7((x,y)) = \left(\frac{1}{3}x,\ \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\right),$$
$$f_8((x,y)) = \left(\frac{1}{3}x,\ \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}\right).$$

ĆWICZENIE 4. Korzystając jedynie z kalkulatora pozwalającego wyznaczyć pierwiastek kwadratowy, oszacuj z dokładnością do 1/16 wymiar fraktalny krzywej Kocha.

Przypomnijmy wzór pozwalający nam wyznaczyć wymiar fraktalny d zbioru samopodobnego:

$$n = s^d,$$

gdzie s oznacza skalę podziału (mówiąc ściślej odwrotność skali), natomiast n liczbę elementów tego podziału. Przypomnijmy również, że wzór ten możemy stosować wówczas, gdy nasz zbiór składa się z n podzbiorów, a każdy jest s razy mniejszą kopią całości.

Krzywą Kocha konstruowaliśmy powtarzając nieskończenie wiele razy następującą procedurę: podziel odcinek na trzy równe części, tj. odcinki trzy razy krótsze niż wyjściowy, a następnie zastąp środkowy odcinek dwoma takimi odcinkami, tak aby tworzyły ramiona trójkąta równobocznego (bez podstawy). Innymi słowy, dany odcinek zastąpiliśmy krzywą składającą się z czterech odcinków trzy razy krótszych. Z tego wynika, że krzywą Kocha możemy podzielić na n = 4 podzbiory, z których każdy jest s = 3 razy mniejszą kopią krzywej Kocha. W ten sposób otrzymujemy równanie

$$4 = 3^d,$$

którego rozwiązanie d jest wymiarem fraktalnym krzywej Kocha.

Naszym zadaniem jest oszacowanie wymiaru d. Zaczniemy od zbadania między jakimi liczbami całkowitymi należy szukać naszego wymiaru. W tym celu będziemy zastępowali d kolejnymi liczbami całkowitymi i sprawdzali jaka jest relacja między 3d a 4.

$$3^0 = 1 < 4, \quad \text{zatem} \quad d > 0,$$
$$3^1 = 3 < 4, \quad \text{zatem} \quad d > 1,$$
$$3^2 = 9 > 4, \quad \text{zatem} \quad d < 2.$$

Z tego wynika, że poszukiwany wymiar należy do odcinka (1, 2).
Aby dokładniej oszacować wartość wymiaru, zbadamy czy leży on w prawej czy lewej połowie tego odcinka. Musimy zatem sprawdzić co się dzieje dla d = 1,5 = 3/2.

$$3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = \sqrt{27} \approx 5.196 > 4, \quad \text{zatem} \quad d < 1.5,$$

co oznacza, że d $\in$ (1, 1.5). Zobaczmy, że w tym przypadku poradzilibyśmy sobie doskonale nawet bez pomocy kalkulatora. Skoro 27 > 25, zatem √27 > 5, a to już wystarczyłoby do stwierdzenia, że d < 1.5.
W dalszej kolejności będziemy postępowali podobnie, tj. będziemy kolejno sprawdzali co dzieje się dla środka odcinka, co pozwoli nam stwierdzić, w której części odcinka leży poszukiwana wartość wymiaru. Zaczniemy od d = 1.25 = 5/4.

$$3^{\frac{5}{4}} = \sqrt{\sqrt{3^5}} = \sqrt{\sqrt{243}} \approx 3.948 < 4,$$

czyli d > 1.25, zatem d $\in$ (1.25,1.5). Teraz d = 1.375 = 11/8.

$$3^{\frac{11}{8}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{3^{11}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{177147}}} \approx 4.529 > 4,$$

z czego wynika, że d < 1.375, więc d $\in$ (1.25, 1.375).
Aby oszacować wymiar d z dokładnością do 1/16 wykonamy jeszcze jeden krok, tj. zbadamy środek powyższego odcinka, czyli liczbę:

$$\frac{1.25 + 1.375}{2} = 1,3125 = \frac{21}{16}.$$

Musimy zatem obliczyć $3^{21/16}$. Chcąc zrobić to jak poprzednio napotykamy pewną trudność - większość kalkulatorów nie dysponuje tyloma cyframi na wyświetlaczu, aby wyświetlić wartość 3^{21}. Trudność tę możemy jednak z łatwością pokonać, korzystając z własności potęg:

$$3^{\frac{21}{16}} \quad 3^1 \cdot 3^{\frac{5}{16}} \quad 3 \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3^5}}}} \quad 3 \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{243}}}} \approx 4.229 > 4,$$

zatem d < 1.3125. Ostatecznie więc, wymiar fraktalny krzywej Kocha d $\in$ (1.25, 1.3125).

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

ĆWICZENIE 5. Korzystając jedynie z kalkulatora pozwalającego wyznaczyć pierwiastek kwadratowy, oszacuj z dokładnością do 1/16 wymiar fraktalny gąbki Mengera.

Gąbkę Mengera konstruowaliśmy z sześcianu o krawędzi długości 1. Dzieliliśmy go na sześciany trzy razy mniejsze - jest ich dwadzieścia siedem - i usuwaliśmy po jednym ze środka każdej ze ścian oraz jeden ze środka całej bryły. Następnie powtarzaliśmy tę procedurę nieskończenie wiele razy, dla każdego sześcianu pojawiającego się w danym kroku konstrukcji. Wynika stąd, że gąbka Mengera składa się z 20 swoich wiernych kopii 3 razy mniejszych. Jej wymiar fraktalny *d* jest zatem rozwiązaniem równania

$$20 = 3^d$$

Podobnie jak w poprzednim zadaniu, zaczniemy od sprawdzenia co dzieje się, gdy *d* zastąpimy kolejnymi liczbami całkowitymi.

$$3^0 = 1 < 20, \quad \text{zatem} \quad d > 0,$$
$$3^1 = 3 < 20, \quad \text{zatem} \quad d > 1,$$

$$3^2 - 9 < 20, \quad \text{zatem} \quad d > 2,$$
$$3^3 - 27 > 20, \quad \text{zatem} \quad d < 3.$$

Czyli wymiaru gąbki Mengera będziemy poszukiwali w przedziale (2, 3).
Teraz będziemy po kolei badali środki pojawiających się odcinków, aby stwierdzić, w której części odcinka znajduje się poszukiwany wymiar.

$$3^{2.5} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 9 \cdot \sqrt{3} \approx 15.588 < 20 \quad \Longrightarrow \quad d > 2.5 \quad \Longrightarrow \quad d \in (2.5, 3),$$
$$3^{2.75} = 3^2 \cdot 3^{\frac{3}{4}} = 9 \cdot \sqrt{\sqrt{27}} \approx 20.516 > 20 \quad \Longrightarrow \quad d < 2.75 \quad \Longrightarrow \quad d \in (2.5, 2.75),$$
$$3^{2.625} = 3^2 \cdot 3^{\frac{5}{8}} = 9 \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{243}}} \approx 17.883 < 20 \quad \Longrightarrow \quad d > 2.625 \quad \Longrightarrow \quad d \in (2.625, 2.75),$$

W ostatnim kroku, aby uzyskać dokładność $\frac{1}{16}$, zbadamy $d = \frac{2.625+2.75}{2} = 2,6875 = 2\frac{11}{16}$.

$$3^{2.6875} = 3^2 \cdot 3^{\frac{11}{16}} = 9 \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{177147}}}} \approx 19.154 < 20,$$

zatem d > 2.6875, czyli ostatecznie d ∈ (2.6875, 2.75).

ĆWICZENIA DODATKOWE DO SAMODZIELNEGO WYKONANIA.

- Oblicz długość krzywej Kocha.
- Zaproponuj własny fraktal. Opisz jego konstrukcję i oszacuj wymiar fraktalny.
- Spróbuj zaprojektować fraktal imitujący jakiś obiekt naturalny (np. paproć, drzewo). Opisz jego konstrukcję przy pomocy rodziny funkcji.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

FIZYKA

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

OD ŁUCZYWA DO LASERA

dr inż. Irena Gronowska

1. Badanie widma światła białego

Przyrządy: siatka dyfrakcyjna, ekran, latarka z żarówką, latarka z tak zwaną diodą białą.

Po wyciemnieniu pomieszczenia oświetlamy siatkę otrzymując widmo na ekranie. Obserwujemy otrzymane widma. Możemy posłużyć się telefonem komórkowym z kamerą, bądź aparatem fotograficznym i zarejestrować otrzymane obrazy. Czym się różnią? Czy po zastosowaniu bardziej precyzyjnej siatki dyfrakcyjnej otrzymalibyśmy widmo w postaci prążków?

2. Badanie światła emitowanego przez neonówkę za pomocą siatki dyfrakcyjnej

Potrzebne: dwie siatki dyfrakcyjne o różnych znanych stałych d, ekran, neonówka, zasilacz, spektrometr optyczny.

Po wyciemnieniu pomieszczenia oświetlamy siatkę otrzymując widmo na ekranie. Obserwujemy otrzymane widmo. Możemy posłużyć się telefonem komórkowym z kamerą, bądź aparatem fotograficznym i zarejestrować otrzymany obraz.
Na ekranie umieszczamy podziałkę milimetrową, na której zaznaczamy położenie prążków. Mierzymy odległość siatki od ekranu. Wyznaczamy długości fali λ dla dobrze widocznych prążków, korzystając ze wzoru:

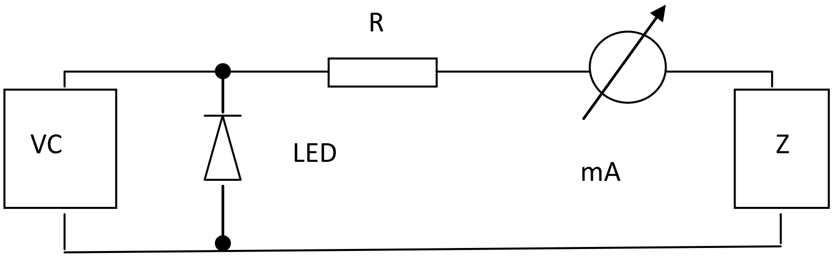
$$d \sin \varphi = n\lambda$$

gdzie φ – kąt pod jakim obserwujemy prążek, kąt wyznaczymy mając odległość siatki od ekranu i odległość prążka od położenia na wprost
n = 1, 2,… rząd widma
Jeżeli dysponujemy spektrometrem optycznym, to powtarzamy pomiary. Porównujemy otrzymane wyniki dla obu metod. Czy są ze sobą zgodne? Czy zgodne są z wynikami tablicowymi?
Czy wyniki udało się otrzymać dla obu siatek?

3. Badanie charakterystyk elektrycznych diody elektroluminescencyjnej

Potrzebne: diody elektroluminescencyjne LED – czerwona, zielona i niebieska, zasilacz regulowany Z, woltomierz cyfrowy VC, miliamperomierz mA, opornik zabezpieczający R.

Łączymy obwód jak na rysunku. Diodę polaryzujemy w kierunku przewodzenia. Wykonujemy pomiary prądu diody I w funkcji napięcia U – odczyty z miliamperomierza i woltomierza cyfrowego. Obserwujemy świecenie diody. Przy jakim napięciu pojawia się światło. Wykonujemy wykres I = f(U). Zaznaczamy napięcie, przy którym następuje gwałtowny wzrost prądu. Pomiary powtarzamy dla kolejnych diod. Czy przy takim samym napięciu następuje gwałtowny wzrost prądu? Wyliczamy energie kwantów odpowiadających długości fali dla kolejnych diod.



4. Badanie diod elektroluminescencyjnych za pomocą siatki dyfrakcyjnej

Potrzebne: diody elektroluminescencyjne LED – czerwona, zielona i niebieska, zasilacz regulowany Z, miliamperomierz mA, opornik zabezpieczający R, siatka dyfrakcyjna, ekran, aparat fotograficzny lub telefon komórkowy z kamerą.

Łączymy obwód jak na rysunku ćwiczenia 3, można nie stosować woltomierza cyfrowego, ale miernik prądu jest potrzebny. Diodę polaryzujemy w kierunku przewodzenia. Oświetlamy siatkę dyfrakcyjną światłem kolejnych diod elektroluminescencyjnej. Obserwujemy i rejestrujemy obraz. Jakie widmo otrzymujemy? Czy przy zmianie odległości widzimy dobrze obraz?

5. Badanie dyfrakcji światła emitowanego przez laser

Potrzebne: laser półprzewodnikowy, siatka dyfrakcyjna, ekran.

Po zaciemnieniu pomieszczenia oświetlamy siatkę. Obserwujemy obraz na ekranie, zwiększamy odległość między siatką a ekranem. Obserwujemy obraz. Umieszczamy podziałkę milimetrową na ekranie, zaznaczamy położenie punktów w widmie I i II rzędu. Mierzymy odległość siatki od ekranu. Wyznaczamy długość fali, korzystając ze wzoru: $d \sin\varphi = n\lambda$ dla n = 1 i n = 2,

kąt φ wyznaczamy mając odległość punktów od położenia na wprost i odległość siatka – ekran.

Odpowiedzi

Ad 1. Obrazy widm są różne. Dioda biała ma przewagę barwy niebieskiej, ponieważ obecnie najczęściej wykorzystywane w latarkach diody białe emitują widmo ciągłe luminoforu, który jest pobudzany do świecenia przez diodę niebieską (największe energie promieniowania optycznego z zakresu widzialnego).
Nie można uzyskać widma w postaci prążków, mimo kwantowego charakteru każdej emisji. Różnice długości fali są zbyt małe.

Ad 2. Metoda pomiaru z wykorzystaniem ekranu jest mniej dokładna, niż z możliwością stosowania spektrometru, może być obarczona znacznymi błędami (niepewnościami pomiarowymi).
W przypadku stosowania siatki o większej stałej, otrzymany obraz bardziej przypomina widmo ciągłe , odległości między prążkami są bardzo niewielkie i trudno je wyznaczyć na ekranie.

Ad 3. Przy najniższym napięciu zaczyna świecić dioda czerwona, a niebieska przy najwyższym. Najmniejszej energii odpowiadają kwanty emitowane przez diodę czerwoną, a najwyższej – przez diodę niebieską. Energie kwantów są zbliżone do wysokości bariery energetycznej diody.

Ad 4. Otrzymujemy widmo pasmowe, związane jest to z energetyczną strukturą pasmową półprzewodników. Przy zwiększaniu odległości obraz staje się źle widoczny, ponieważ wiązka jest rozbieżna i im dalej, tym mniejsze natężenie światła.

Ad 5. Otrzymujemy obraz w postaci punktów. Laser emituje śwtało spójne o widmie liniowym . Długość fali powinno się bez trudu wyznaczyć. Jeżeli zastosowano laser czerwony, to wynik powinien być ponad 0.6 μm.

FIZYKA ARYTMII CZYLI JAK FIZYCY WSPÓŁPRACUJĄ Z KARDIOLOGAMI, KTÓRA GODZINA JEST NA BIEGUNIE I JAK UCZESAĆ JEŻA?

dr inż. Teodor Buchner

1. Trygonometria.

Masz trójkąt prostokątny o bokach 3, 4 i 5. Dwa kąty ostre to kąty α i β (dowolnie). Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych sinus, kosinus, tangens i kotangens (czyli 1/tangens) tych kątów. Następnie sprawdź w tablicach matematycznych ile wynoszą wartości kątów α i β.

Odp: Kąty wynoszą około 37° (dokładnie 36.86°) i około 53° (dokładnie 53.13°).

2. Rozkładanie prędkości.

Mrówka wyrusza z rogu prostokątnego stołu o wymiarze 1x2m z prędkością 1 cm/s. Prędkość mrówki tworzy kąt 45° z dłuższym bokiem stołu. Po jakim czasie i w jakim punkcie mrówka dojdzie do przeciwległej krawędzi stołu.

Odp: Po upływie 100√2 sekund mrówka znajdzie się na przeciwległym końcu – dokładnie w połowie szerokości stołu.*

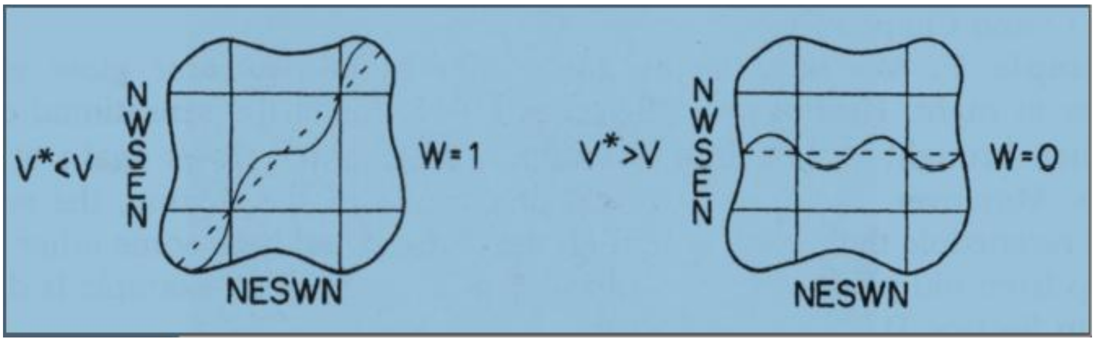
3. Rybak znajduje się na rzece, płynącej na północ, której prędkość nurtu wynosi w każdym miejscu V* i jest stała. Rybak może wiosłować z prędkością V względem wody. Rybak obiera sobie kurs ϕ, jakim zamierza płynąć, z przedziału 0-360°. Ponieważ rybaka znosi rzeka, w rzeczywistości będzie płynął kursem ψ. Wyznacz funkcję $\psi = f(\phi)$, według poniższych kroków:
Wyznacz za pomocą kinematyki (składanie prędkości) zależność funkcyjną $\psi = f(\phi)$. Użyj parametru V*/V.
Jaka będzie funkcja f jeśli prędkość rzeki względem rybaka będzie dużo większa (w przypadku granicznym – nieskończona V*/V=0 – sprawdź jak zmieni się wzór i narysuj przebieg tej funkcji dla ϕ od 0 do 360°.
Jaka będzie funkcja f jeśli prędkość rybaka będzie nieskończona V*/V= ∞ – sprawdź jak zmieni się wzór i narysuj przebieg funkcji.
Czy azymut ruchu rybaka ψ wzrośnie czy zmaleje na skutek prędkości nurtu rzeki? Jaki charakter ma ta zmiana dla każdej ćwiartki układu współrzędnych rozpatrywanych po kolei.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Mazowiecki Kurator Oświaty · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Narysuj jak w przybliżeniu przebiega funkcja f dla pośrednich wartości V*/V (weź na przykład V*/V=1/2 lub V*/V=2).
Czy występuje taka wartość V* dla której postać rozwiązania zmienia się jakościowo (znacząco różny typ rozwiązania)?
Jak wygląda funkcja f dla różnych wartości parametru – narysuj funkcję 2-D używając pakietu graficznego (np. Octave) lub wykonaj model z papieru lub folii aluminiowej.

Odp: $tg(\psi) = (\sin\phi) / (\cos\phi + V^*)$



Rysunek 1: Kurs rybaka jako funkcja kursu zamierzonego dla dwóch przypadków: a) kiedy prędkość rzeki V jest mniejsza od prędkości rybaka V (po lewej),*

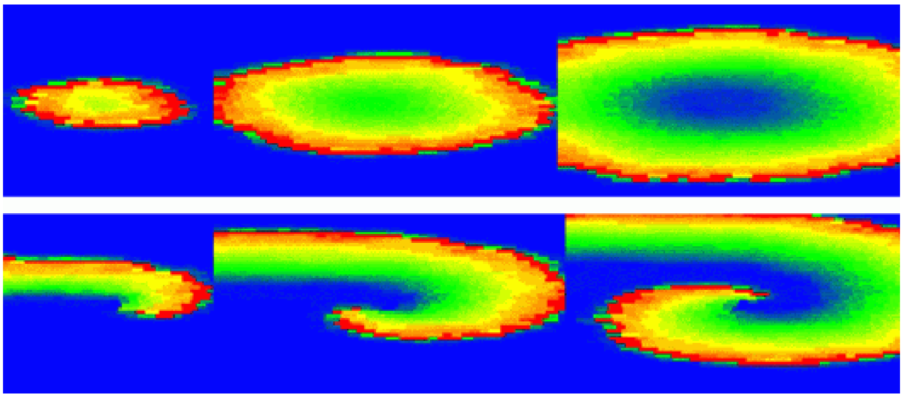
b) kiedy prędkośc rzeki V jest większa od prędkości rybaka V (po prawej).*

Liczba W to tzw liczba obrotów (winding number) , która mówi o ile zmieni się wartość funkcji jeśli kąt (faza) który jest jej argumentem zmieni się o 360°. Por. http://en.wikipedia.org/wiki/Winding_number

Rys. Za A.T. Winfree.

4. Wykonaj z gliny, piasku lub ciasta model fali potencjału czynnościowego dla pobudzenia zatokowego (fala kulista) i model fali spiralnej – poziom ciasta jest najwyższy tam gdzie potencjał czynnościowy ma większą wartość (kolor czerwony), a najniższy tam gdzie widoczny jest kolor niebieski (por. Rysunek 2). Dla fali kulistej uwzględnij także poprzednie pobudzenia (będą to kolejne takie fale o większej średnicy, najlepiej jeśli będzie ich kilka / wiele). Dla fali spiralnej: przedłuż jej koniec tak żeby w obszarze modelu mieściło się kilka zwojów.
Na podstawie modelu lub na podstawie zamieszczonego rysunku odpowiedz na pytanie: Jeśli w chwili t=0 pobudzenie wyglądało tak jak na rysunku 2 w dolnym rzędzie z lewej strony to ile razy przeszło pobudzenie przez punkty znajdujące się na końcu dwóch czarnych linii, widocznych na rysunku 2.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki



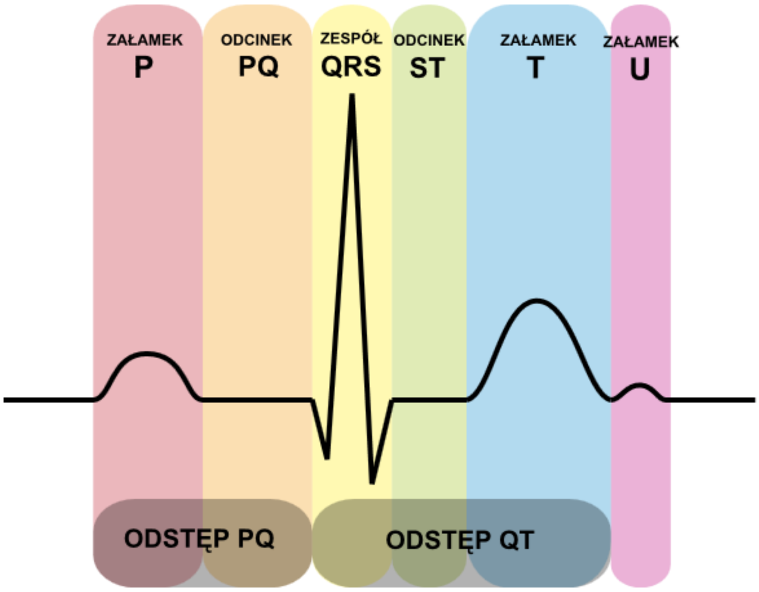
Rysunek 2: Potencjał czynnościowy w tkance serca człowieka dla pobudzenia zatokowego (górny rząd rysunków) i fali spiralnej (dolny rząd rysunków). Kolory jak na mapie fizycznej: niebieski oznacza wartość spoczynkową (najniższą), zaś czerwony najniższą. Linia którą tworzą czerwone punkty oznacza położenie maksimum potencjału czynnościowego (frontu fali pobudzenia) w danym momencie. Wiele fal spiralnych w ruchu dla różnych modeli tkanki mięśnia sercowego można zobaczyć na stronie: http://www.scholarpedia.org/article/Models_of_cardiac_cell

5. Na wykonanym modelu połóż kółko z drutu. Ile wynosi różnica faz (liczba obrotów) liczona wzdłuż kółka jeśli a) w środku kółka znajduje się czubek fali spiralnej, b) w środku kółka nie znajduje się czubek fali spiralnej. Uwaga: liczba obrotów jest równa liczbie maksimów potencjału czynnościowego, znajdujących się pod kółkiem.

Odp: a) $360°$*, b) 0.*

6. Suma potencjałów czynnościowych generowanych przez mięsień sercowy daje się obserwować w formie potencjałów elektrycznych na powierzchni ciała – klatki piersiowej lub kończyn. Jest to wykorzystywany w badaniu serca elektrokardiogram - EKG. Niżej przedstawiona jest krzywa EKG dla pobudzenia zatokowego.
Na wykresie EKG analizuje się:

linię izoelektryczną – linia pozioma zarejestrowana w czasie, gdy w sercu nie stwierdza się żadnych pobudzeń (aktywności). Najłatwiej wyznaczyć ją według odcinka PQ. Stanowi ona punkt odniesienia poniższych zmian
załamki – wychylenia od linii izoelektrycznej (dodatni, gdy wychylony w górę; ujemny, gdy wychylony w dół)
odcinki – czas trwania linii izoelektrycznej pomiędzy załamkami
odstępy – łączny czas trwania odcinków i sąsiadującego załamka



Przykładowy zapis EKG
Źródło: Wikipedia; plik: EKGKomplexPL.svg

Oblicz czas trwania prawidłowego załamka P, jeżeli na wykresie EKG ta linia ma długość 3mm przy zapisie 25mm/s.

Odpowiedź:

$$t = \frac{3mm}{25\frac{mm}{s}} = 0{,}12s$$

Dla dociekliwych (dla tych którzy nie boją się komputera)

Treść poniższych programów należy wpisać używając notatnika Windows, Linuksowego vi lub innego prostego edytora tekstowego (tzn. nie Worda) do plików rowboat.m i rowboat_3d.m – poniżej są teksty obu plików. Następnie należy uruchomić skrypt rowboat_3d.m w środowisku Octave. Opis instalacji środowiska Octave (darmowy odpowiednik Matlab'a) znajdziecie Państwo na przykład tutaj:
http://www.neuroinf.pl/Members/danek/swps/exercises_html
Znakiem procentu poprzedzone są komentarze. Oczywiście nie trzeba ich przepisywać.
Matlab lub jego odpowiednik Octave to pakiet matematyczny, który umożliwia na przykład wyliczenie wartości funkcji i wykreślenie jej wykresu. Środowisko Matlab jest szeroko używane w nauce i technice, na przykład w analizie sygnału, w związku z tym warto się z nim zapoznać. Efekty akustyczne wykorzystywane w muzyce elektronicznej lub też transformacje obrazów można projektować i wykonywać za pomocą środowiska Matlab.

rowboat.m

function [psiprime] = rowboat(psi,v,vstar) % ten nagłówek oznacza że w tym pliku zdefiniowana jest funkcja i pokazuje z jakimi parametrami będzie wywołana.
%Funkcja wylicza nową fazę rybaka (kurs którym faktycznie będzie się poruszał) w funkcji starej fazy (kursu którym chce płynąć)
%Psi oznacza starą fazę, psiprime – nową fazę.
%Poniżej podany jest opis wzoru zdefiniowanego w tej funkcji.
%sn = sin(2 * pi * psi);
%cs = cos(2 * pi * psi);
%vv = vstar ./ v;
%denom = cs - vv;
%frac = sn ./ denom;
%psiprime = atan(frac);
%psiprime = atan(sin (2 * pi * psi) ./ (cos(2* pi * psi) - vstar ./ v));
if(nargin==2)
% Jeśli do funkcji przekazane są dwa parametry – drugi z nich to iloraz vstar ./v. Jeśli trzy: są to kolejno psi v i star
psiprime = atan(sin (psi) ./ (cos(psi) – v)); % tu następuje wyliczenie wartości psiprime w wersji z dwoma argumentami. Atan to funkcja arcus tangens – funkcja odwrotna do funkcji trygonometrycznej. Sin i cos to funkcje sinus i cosinus.
else
psiprime = atan(sin (psi) ./ (cos(psi) - vstar ./ v)); %tu następuje wyliczenie wartości psiprime w wersji z trzema argumentami
end %zakończenie pętli if/else
end %zakończenie procedury

rowboat_3d.m

%Zmienna vstarv = vstar ./ v;
vstarv = 0.1:0.1:2.0; %Utwórz wektor złożony z wartości od 0.1 do 2.0 ze skokiem co 0.1.
psi = -pi:0.1:pi;% -Utwórz wektor o wartościach od - pi do pi ze skokiem co 0.1.
[Xpsi,Yvstarv] = meshgrid(psi,vstarv); % Utwórz dwuwymiarową siatkę (macierz) wszystkich możliwych wartości parametrów psi i vstarv
- potrzebną do wyliczenia wartości funkcji
Zpsiprime = rowboat(Xpsi,Yvstarv); %Wyznacz wartość funkcji dla tych wartości parametrów
s=surf(Xpsi,Yvstarv,Zpsiprime); %Narysuj wykres
xlabel('\phi');%Ustaw etykietę osi X
ylabel('v^{*}/v');%Ustaw etykietę osi Y
zlabel('\phi''');%Ustaw etykietę osi z
title('3-D');%Ustaw tytuł wykresu

```
set(gca,'XTick',-pi:pi/2:pi) %Ustaw oś X od -pi do pi
set(gca,'XTickLabel',{'-pi','-pi/2','0','pi/2','pi'}) % Ustaw etykiety osi X
set(gca,'ZTick',-pi/2:pi/2:pi/2)%Ustaw oś Z od -pi /2do pi/2
set(gca,'ZTickLabel',{'-pi/2','0','pi/2'}) % Ustaw etykiety osi Z
set(s,'EdgeColor','none'); % Usuń krawędzie z wykresu.
print( "wykres.png", "-dpng");%zapisz otrzymany obrazek do pliku graficznego
```

OD KWARKÓW DO GROMAD GALAKTYK – BUDOWA I DZIEJE WSZECHŚWIATA

dr Krystyna Wosińska

1. Znamy trzy rodziny leptonów:
   I elektron i neutrino elektronowe
   II mion i neutrino mionowe
   III taon i neutrino taonowe

Przynależność do danej rodziny określają liczby leptonowe: elektronowa, mionowa i taonowa. Każda cząstka ma także swoją antycząstkę. Wartości liczb leptonowych i ładunków leptonów i antyleptonów zestawiono w tabeli:

Nazwa cząstki lub antycząstki	Symbol	Ładunek	Liczba leptonowa		
			elektronowa	mionowa	taonowa
Elektron	e^-	-1	1	0	0
neutrino elektronowe	ν_e	0	1	0	0
antyelektron (pozyton)	e^+	1	-1	0	0
antyneutrino elektronowe	$\bar{\nu}_e$	0	-1	0	0
Mion	μ^-	-1	0	1	0
neutrino mionowe	ν_μ	0	0	1	0
Antymion	μ^+	1	0	-1	0
antyneutino mionowe	$\bar{\nu}_\mu$	0	0	-1	0
Taon	τ^-	-1	0	0	1
neutrino taonowe	ν_τ	0	0	0	1
antytaon	τ^+	1	0	0	-1
antyneutrino taonowe	$\bar{\nu}_\tau$	0	0	0	-1

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty Al. Jerozolimskie 32 00-024 Warszawa

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

W rozpadach leptonów liczby leptonowe: elektronowa, mionowa i taonowa są zawsze zachowane.
Oczywiście musi też być zachowany ładunek elektryczny.
Przeanalizuj dane zawarte w tabeli i odpowiedz, czy może zajść następujący rozpad:

a. $\tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$

b. $\tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$

c. $\mu^+ \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_\mu$

d. $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$

e. $e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$

Odpowiedzi:

a. Nie, liczba taonowa nie jest tu zachowana - przed rozpadem liczba taonowa równa jest 1, po rozpadzie równa 0.
b. Tak, liczba taonowa przed rozpadem i po rozpadzie równa jest 1, liczba mionowa równa jest 0.
c. Nie, wprawdzie liczba mionowa jest zachowana (przed i po rozpadzie równa -1), liczba elektronowa też jest zachowana (stale równa 0), ale ładunek nie jest zachowany.
d. Tak, liczby leptonowe mionowa i elektronowa są zachowane. Ładunek również jest zachowany.
e. Nie, wprawdzie liczby leptonowe i ładunek są zachowane, ale naruszona byłaby zasada zachowania energii. Zgodnie z tym, o czym była mowa na wykładzie elektron ma mniejszą masę (a więc i energię spoczynkową $E = mc^2$) niż mion, więc nie starczyłoby energii na utworzenie mionu. Elektron jest najmniejszym leptonem, nie ma na co się rozpaść i dlatego jest cząstką trwałą.

2. Oszacuj liczbę protonów w obserwowalnym Wszechświecie. Promień obserwowalnego Wszechświata wynosi 13,7 mld lat świetlnych (taką drogę światło mogło przebyć od Wielkiego Wybuchu – czas życia Wszechświata wyznaczono w eksperymencie WMAP na 13,7 mld lat z dokładnością 1%). Załóż, że zawartość Wszechświata to wodór (zawartość cięższych pierwiastków pomijamy). Gęstość materii we Wszechświecie wynosi w przybliżeniu 1 atom na metr sześcienny. Prędkość światła równa jest $3{\cdot}10^8$ m/s.

Rozwiązanie: 1 rok = 31 536 000 s = $3{,}1536{\cdot}10^7$ s
Promień Wszechświata przeliczamy na sekundy świetlne wykonując mnożenie
R = $13{,}7{\cdot}10^9{\cdot}3{,}1536{\cdot}10^7$ s świetlnych = $4{,}320432{\cdot}10^{17}$ s świetlnych. Aby wyrazić promień w metrach mnożymy otrzymaną wartość przez prędkość światła.
R = 13,7 mld lat świetlnych = $4{,}320432{\cdot}10^{17}$ s $\cdot 3{\cdot}10^8$m/s = $12{,}961296{\cdot}10^{25}$m
Objętość Wszechświata $V = 4/3 \cdot\pi\cdot R^3 = 9{,}1162{\cdot}10^{78}\ m^3 \approx 10^{79}\ m^3$

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Odp.: Liczba protonów we Wszechświecie to około 10^{79}.

3. Anihilacja to zjawisko zachodzące, gdy materia spotyka się z antymaterią. Materia i antymateria w wyniku anihilacji znikają, a cała ich energia spoczynkowa $E = mc^2$ zamienia się w energię promieniowania.
Wyobraź sobie, że odkryłeś źródło antymaterii i znalazłeś metodę zamiany energii powstałej podczas anihilacji w energię elektryczną. Ile zarobisz, gdy poddasz anihilacji 1 kg materii i 1 kg antymaterii? 1 kWh energii elektrycznej kosztuje 0,50 zł.

Rozwiązanie:
Uzyskana energia: $E = mc^2 = 2\ \text{kg}\cdot(3\cdot10^8\ \text{m/s})^2 = 18\cdot10^{16}\ \text{J} = 5\cdot10^{10}\ \text{kWh}$
Wartość tej energii to $5\cdot10^{10}\ \text{kWh}\cdot0{,}5\ \text{zł/kWh} = 2{,}5\cdot10^{10}$ zł

Odp. Zarobek wyniesie 25 miliardów zł

4. Ile kilogramów materii trzeba by anihilować, aby zasilać Polskę przez rok w energię elektryczną. Roczne zużycie energii elektrycznej w Polsce wynosi około 150 TWh.

Rozwiązanie: Energię 150 TWh wyrażamy w J, wykonując działanie:

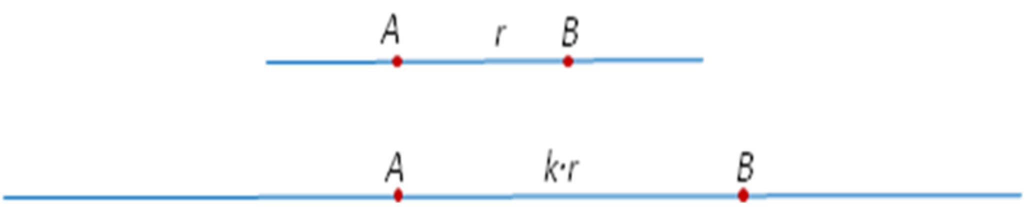
$$150\ \text{TWh} = 150\cdot10^{12}\ \text{Wh} = 150\cdot10^{12}\ \text{W}\cdot 3600\ \text{s} = 5{,}4\cdot10^{17}\ \text{J}$$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{5{,}4\cdot10^{17}\,J}{\left(3\cdot10^8\ m/s\right)^2} = 6kg$$

Odp. Potrzeba łącznie 6 kg, czyli 3 kg materii i 3 kg antymaterii

5. Ucieczka galaktyk z prędkościami wprost proporcjonalnymi do odległości od Ziemi wcale nie oznacza, że Ziemia leży w centrum Wszechświata. Niedowiarek może się o tym przekonać, udowadniając, że dowolne dwa punkty A i B leżące na rozciąganej gumie oddalają się od siebie z prędkością wprost proporcjonalną do odległości między nimi. (Taka guma jest bardzo uproszczonym, jednowymiarowym modelem rozszerzającego się Wszechświata.)
Wskazówka: Załóż, że długość gumy w czasie Δt powiększyła się k razy

Rozwiązanie:



W czasie Δt, gdy guma wydłużyła się k razy, odległość punktu B od punktu A wzrosła od r do $k\cdot r$, czyli punkt B oddalił się od A o $\Delta S = k\cdot r - r$

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Prędkość, z jaką punkt B oddalał się od punktu A:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{k \cdot r - r}{\Delta t} = \frac{k-1}{\Delta t} r.$$

Jeśli podstawimy

$$H = \frac{k-1}{\Delta t},$$

otrzymamy prawo Hubble'a: $v = H \cdot r$ słuszne dla dowolnych 2 punktów.

ŚWIATŁOWODY

prof. dr hab. Mirosław Karpierz

1. Doświadczenie z łyżeczką w szklance

Nalać wodę do przeźroczystej szklanki z równymi ściankami. Szklanka z wodą jest soczewką cylindryczną o czym można się przekonać spoglądając przez szklankę na przedmioty umieszczone na zewnątrz szklanki. Włożyć do szklanki łyżeczkę, słomkę lub patyczek. Patrząc z boku na granicy woda/powietrze łyżeczka wydaje się podzielona na dwie rozsunięte części. Przesunięcie to zmienia się wraz z przesuwaniem łyżeczki w lewo i w prawo w stronę brzegu szklanki. Jest to spowodowane załamaniem światła na granicach woda/szkło i szkło/powietrze. Gdy nie ma wody, załamanie na obu powierzchniach szkła (równoległych) jest takie samo i promień światła ulega tylko małemu przesunięciu bez zmiany kierunku.
Po zbliżeniu do brzegu szklanki, część łyżeczki zanurzona w wodzie zanika. Wynika to ze zjawiska całkowitego wewnętrznego odbicia, które pojawią się, gdy światło pada pod dużym kątem na granicę ośrodków od strony ośrodka gęstszego optycznie. W doświadczeniu można zmierzyć w przybliżeniu maksymalne rozsuniecie obrazów łyżeczki w wodzie i powietrzu a także maksymalną szerokość łyżeczki, której nie widać (wielkość obszaru z którego zachodzi całkowite wewnętrzne odbicie). Czy wyniki te ulegną zmianie, jeśli użyta zostanie szklanka o innej średnicy? Jak wyniki doświadczenia zmienią się, jeśli zamiast wody użyta zostanie inna ciecz?

2. Doświadczenie Colladona

Do doświadczenia potrzebny jest wskaźnik laserowy. W plastikowej przeźroczystej butelce należy zrobić okrągły otwór na bocznej ściance u dołu butelki. Otwór powinien być taki, aby wypływająca przez niego woda tworzyła równomierną cylindryczną strużkę. Okleić ściankę wokół otworu nieprzeźroczystym papierem. Świecąc wskaźnikiem laserowym z drugiej strony butelki zaobserwować prowadzenie światła w strużce wylewającej się wody. Doświadczenie jest bardziej efektowne w zaciemnionym pomieszczeniu.

3. Doświadczenie z ugięciem światła na płytach CD i DVD

Do doświadczenia potrzebny jest wskaźnik laserowy. Oświetlić wskaźnikiem laserowym rowki na płycie CD. Zaobserwować na ścianie lub kartce papieru powstałe ugięte promienie światła. Zmierzyć odległość pomiędzy dwoma sąsiednimi promieniami. W takich samych warunkach dokonać pomiarów dla płyty DVD. Stosunek zmierzonych odległości jest równy stosunkowi odległości pomiędzy rowkami na obu płytach. Na płycie CD rowki są w odległości 1,6 mikrometra a na płycie DVD odpowiednio 0,74 mikrometra.

4. Doświadczenie z bańkami mydlanymi

Obserwować pod światło puszczane bańki mydlane lub cienkie błonki mydlane. Patrząc na bańki mydlane, widać, że niektóre z nich mienią się różnymi barwami. Widoczne kolory są wynikiem interferencji światła odbitego od dwóch ścianek błony. Fale, których długość jest zbliżona do podwójnej grubości błony nie ulegają odbiciu. Natomiast fale, których długość jest zbliżona do połowy grubości błony są silnie odbijane. Ponieważ światło widzialne ma fale o długości od około 0,4 mikrometra (światło fioletowe) do około 0,7 mikrometra (światło czerwone), to błony o grubości kilku dziesiątych mikrometra przepuszczają selektywnie światło. Dla błon zbyt cienkich i zbyt grubych nie zachodzi taki efekt i są one wtedy przeźroczyste.

5. Zadanie z prędkością światła

Po jakim czasie światło obiegnie kulę ziemską? Ile razy może to zrobić w ciągu 1 sekundy?
Prędkość światła to 300 000 km/s. Obwód Ziemi to około 40 000 km. Aby przebyć taką odległość światło potrzebuje 4/30 sekundy (czyli około 0,13 s). W ciągu 1 sekundy światło może zatem obiegnąć Ziemię 30/4=7,5 razy.
Sygnał elektryczny w drucie porusza się z prędkością taką jak fala elektromagnetyczna. Podobnie jak dla światła w ośrodku materialnym, prędkość sygnału w drucie jest mniejsza od prędkości światła w próżni, ale z nią porównywalna. Dlatego rozmawiając przez telefon nie słyszymy dużych opóźnień (sygnał telefoniczny dociera do nas częściowo po kablu metalowym a częściowo światłowodem, przy czym na dużych odległościach głównie jest to światłowód). Pojawiające się opóźnienia są bardziej spowodowane różnymi elementami toru telekomunikacyjnego (w tym liniami opóźniającymi), a nie długością kabla i światłowodu.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

HOLOGRAFIA? JAKIE TO PROSTE

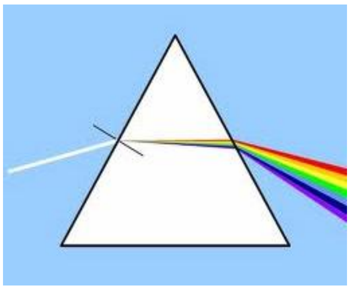
dr hab. Maciej Sypek

(we współpracy z dr inż. Jarosławem Suszkiem)

Ćwiczenie 1: Obserwacja rozszczepienia światła białego.

Potrzebne: źródło światła białego, pryzmat.

Zadanie polega na zaobserwowaniu rozszczepienia światła białego poprzez przepuszczenie wiązki przez pryzmat. Należy zwrócić uwagę na kolejność barw powstałych w wyniku rozszczepienia. Powinna zostać zaobserwowana kolejność taka jak w tęczy.

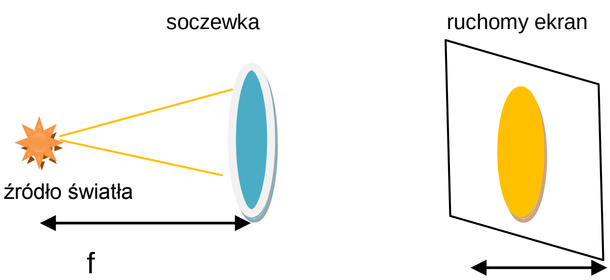


Rys. 1

Ćwiczenie 2: Budowa układu optycznego służącego do generowania (tworzenia) fali płaskiej

Potrzebne: mała żaróweczka (koniecznie bez odbłyśnika) o krótkim żarniku, bądź mała dioda o dużej jasności (źródło powinno być pseudo-punktowe), soczewka o ogniskowej ok. 25cm (czyli o mocy 4D), ekran.

Zadanie polega na ustawieniu układu zgodnie ze schematem:



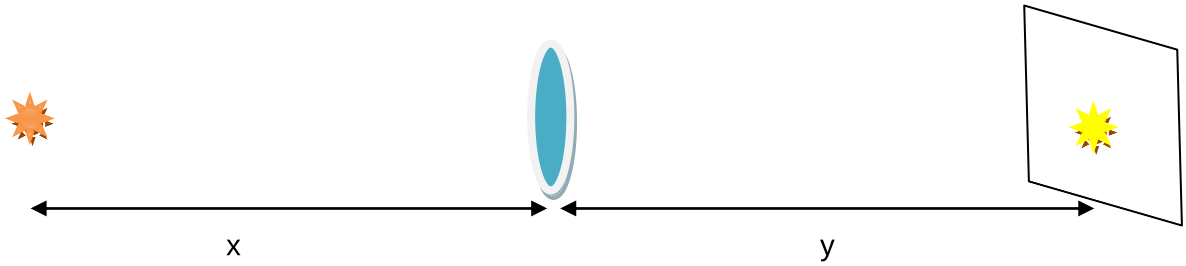
Rys. 2

Należy zmierzyć średnicę wiązki światła powstałej na ekranie. Pomiar należy powtórzyć dla różnych położeń ruchomego ekranu względem soczewki. Jeżeli średnica zmienia się znacząco należy skorygować ustawienie soczewki względem źródła światła. Jeżeli średnica nie zmienia się istotnie na różnych odległościach cel zadania został osiągnięty – otrzymano dobre przybliżenie fali płaskiej.

Ćwiczenie 3: Budowa układu obrazującego wykorzystującego soczewkę sferyczną

Potrzebne: żarówka, soczewka o ogniskowej ok. 25cm (czyli o mocy 4D), ekran.

W ćwiczeniu trzeba zbudować układ przedstawiony na schemacie poniżej.



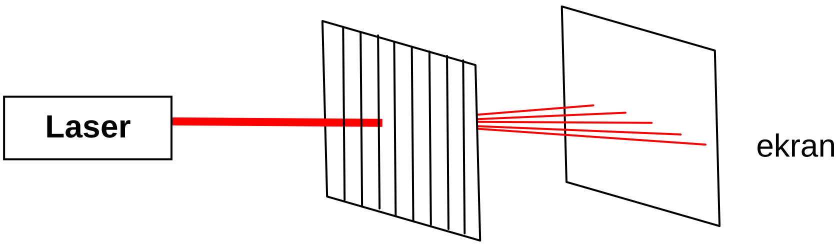
Rys. 3

Należy wrócić uwagę aby odległości *x* oraz *y* były nie mniejsze niż ogniskowa soczewki. W kolejnym kroku dobierając odpowiednio odległości *x* i *y*, należy zobrazować na ekranie żarnik wykorzystanej żarówki.
Należy wrócić uwagę aby odległość *x* była większa niż ogniskowa soczewki. Dla ustalonej odległości *x* przesuwając ekran, szukamy takiej odległości y, aby na ekranie uzyskać ostry obraz włókna żarówki. Ile jest takich położeń? Czym różnią się otrzymane obrazy?

Ćwiczenie 4: Obserwacja zjawiska interferencji światła spójnego

Potrzebne: źródło laserowe (np. szkolny laser He-Ne, zielony pointer), siatki dyfrakcyjne jedno- i dwuwymiarowe, skrawki różnych materiałów ażurowych (np. firanek), płyta CD oraz płyta DVD.

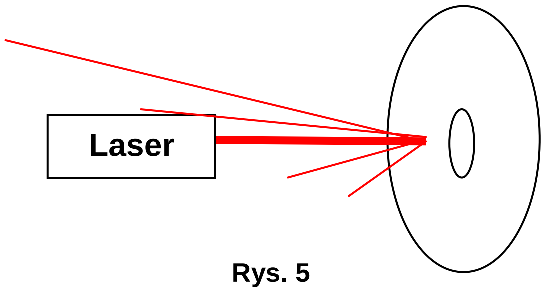
W pierwszej kolejności należy oświetlić laserem kolejno siatki dyfrakcyjne i materiały ażurowe zgodnie ze schematem zamieszczonym poniżej



Siatka dyfrakcyjna

Rys. 4

W powstałym na ekranie obrazie prążków interferencyjnych należy zaobserwować różnicę położeń prążków względem siebie dla siatki jedno – i dwuwymiarowej.



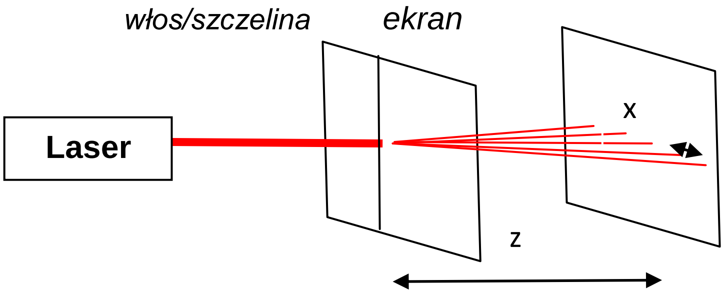
Rys. 5

W analogiczny sposób należy postąpić wykorzystując w doświadczeniu płytę CD i DVD (interferencja zachodzi na krawędziach ścieżek, ścieżki te są około dwa razy gęstsze na płycie DVD niż na CD).

Ćwiczenie 5: Pomiar grubości włosa oraz szerokości szczeliny metodą interferencyjną

Potrzebne: źródło laserowe (np. szkolny laser He-Ne, zielony pointer) o znanej długości emitowanej fali λ, włos, suwmiarka, miarka/linijka.

W ćwiczeniu należy zbudować układ pomiarowy zgodnie ze schematem:



Rys. 6

W doświadczeniu suwmiarka będzie wykorzystywana jako szczelina o regulowanej szerokości, szczelina musi być węższa od szerokości wiązki laserowej. Miarką należy zmierzyć odległość od ekranu do włosa/szczeliny – *z*; linijką zmierzyć odległość między dwoma „ciemnymi" prążkami obrazu interferencyjnego na ekranie – *x*. Poszukiwaną grubość/szerokość włosa/szczeliny *d* można obliczyć korzystając ze wzoru:

$$d = \frac{\lambda \cdot z}{x}$$

Uwaga! λ z reguły podawana jest w nanometrach, a z i x w milimetrach. Mierząc odległość między kilkoma minimami można uśrednić pomiar odległości *x*.

OGNIWA I AKUMULATORY – OD BATERII Z BAGDADU DO SAMOCHODU NA WODÓR.

dr inż. Michał Marzantowicz

1. Jedną z elektrod ogniwa stanowi srebro, a drugą glin. Podaj, która z elektrod jest anodą, a która katodą i oblicz takiego ogniwa SEM (napięcie pomiędzy anodą i katodą dla ogniwa otwartego).

Wskazówka: wykorzystaj szereg napięciowy metali. Jeśli znajdziesz w domu srebrną łyżeczkę i aluminiową łyżeczkę, możesz spróbować wykonać model takiego ogniwa. Rozwiązanie: tak zwany potencjał standardowy (względem elektrody wodorowej) dla glinu wynosi –1.66, a dla srebra +0.8. Zatem różnica wynosi 2.46V i takie napięcie powinniśmy uzyskać na zaciskach ogniwa. Glin stanie się anodą, a srebro - katodą.

2. Bateria z ziemniaka (doświadczenie)

Potrzebne: ziemniaki, monety miedziane lub mosiężne (1,2 lub 5 groszówki) lub gwoździe miedziane, folia aluminiowa, gwoździe ocynkowane, woltomierz z zaciskami typu „krokodylki", dioda, przewody z zaciskami.

Ziemniaki, cytryny lub inne owoce stanowią dobry elektrolit. Należy w nim umieścić elektrody – poprzez wbijanie (gwoździe miedziane i gwoździe ocynkowane), przez nacinanie (monety) lub przecięcie ziemniaka na plasterki (folia aluminiowa, monety). Zmierz napięcie na zaciskach ogniwa, podłączając końcówki woltomierza do elektrod. Zbadaj, jaki efekt uzyskujemy przy równoległym, a jaki przy szeregowym połączeniu takich ogniw. Dioda zaczyna świecić przy napięciu około 3V (dokładna wartość zależy od barwy światła i rodzaju diody). Wykonaj takie połączenie ogniw, by zaświeciła się dioda.
Wypróbuj również inne elektrolity pochodzenia naturalnego, spróbuj określić dla których ogniwo pracuje w stabilny sposób. Powtórz doświadczenie z ugotowanym ziemniakiem. Pokrój go w plastry, budując stos przekładany płytkami z metalu. Gotowanie ziemniaka zapewnia stabilną pracę ogniwa przez kilka dni – dowiodła tego grupa izraelskich naukowców z Hebrew University [J. Renewable Sustainable Energy **2**, 033103 (2010);
http://jrse.aip.org/resource/1/jrsebh/v2/i3/p033103_s1?view=fulltext].
To ciekawe rozwiązanie ma być tanią alternatywą dla tradycyjnych ogniw przeznaczoną dla państw rozwijających się.

3. Bateria z Bagdadu – rekonstrukcja (doświadczenie)

Potrzebne: gliniany dzbanek lub mała butelka, ocet, rura miedziana lub zwinięta blaszka miedziana o średnicy nieco mniejszej niż średnica otworu dzbana, pręt stalowy o średnicy mniejszej niż rura miedziana, korek, plastelina.

W pierwszej kolejności przygotuj zatyczkę do dzbana lub butelki: rurę miedzianą i pręt umieść współśrodkowo (możesz w tym celu użyć korka i plasteliny). Po przymierzeniu zatyczki oba przedmioty powinny sięgać prawie do dna dzbana/butelki. Następnie nalej octu do wnętrza dzbana. Dopasuj ostatecznie zatyczkę i uszczelnij ją plasteliną. Sprawdź napięcie na zaciskach ogniwa – oczekiwany wynik jest rzędu dziesiątych części V. Porównaj otrzymaną wartość z wartością obliczoną na podstawie z szeregu napięciowego. Przedyskutuj z nauczycielem przyczynę ewentualnych różnic obu wartości.
Spróbuj przy pomocy kilku połączonych ze sobą ogniw wykonać pokrycie galwaniczne na powierzchni metalu. Przygotuj roztwór (możesz do tego celu wykorzystać resztkę octu lub wykonać roztwór soli) w szklanym naczyniu lub misce. Zanurz w nim płytkę miedzianą i przedmiot, który zamierzasz pokryć warstwą miedzi – może to być np. blaszka aluminiowa, żelazna lub ocynkowana. Podłącz odpowiednio elektrody – blaszka miedziana w roztworze ma stać się anodą, a przedmiot pokrywany warstwą miedzi – katodą. Zostaw doświadczenie na kilka godzin i sprawdź jakość pokrycia.

4. Szereg elektrochemiczny (doświadczenie)

Potrzebne: zlewki szklane, elektrolit - roztwór kwasu siarkowego (VI) (może być również bezpieczniejszy w użyciu roztwór soli), jednakowych rozmiarów płytki z różnych metali (miedź, cynk lub żelazo pokryte cynkiem, żelazo, aluminium, cyna, ołów), miernik (woltomierz), zaciski „krokodylki", rękawiczki, okulary ochronne.

Pod kierunkiem nauczyciela przygotuj roztwór kwasu siarkowego (ok. 10%) (lub inny elektrolit) w dużym naczyniu. W przypadku użycia kwasu siarkowego zachowaj szczególną ostrożność, ponieważ jest silnie żrący. Następnie nalej elektrolit do kilku zlewek, umieszczając w nich płytki z różnych metali. Zmierz napięcie pomiędzy elektrodami dla każdej pary płytek. Zapisz obserwacje. Powtórz doświadczenie po około pół godziny. Na podstawie otrzymanych wyników spróbuj utworzyć swoją wersję szeregu elektrochemicznego metali. Porównaj ją z szeregiem potencjałów standardowych względem elektrody wodorowej, sformułuj wnioski.

5. Instrukcja obsługi

Sprawdź, jakiego typu ogniwa znajdują się w urządzeniach elektronicznych w szkole i w Twoim domu. Zwróć uwagę, czy są one eksploatowane w odpowiedni sposób. Postaraj się sporządzić prostą instrukcję ładowania urządzeń dla domowników.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

6. Korozja (doświadczenie)

Elektrochemia bada nie tylko reakcje zachodzące w ogniwach elektrochemicznych, ale również zjawiska korozji. Spróbuj wyjaśnić, dlaczego łączenie różnych metali może przyśpieszać korozję. Zastanów się, jakich metali nie powinno się łączyć w warunkach środowiska sprzyjających korozji. Sprawdź, jaki jest skład stali kwasoodpornej i z jakich względów ulega ona korozji znacznie wolniej niż zwykła stal.
W kilku zamkniętych słoikach umieść elementy z różnych metali – w kontakcie ze sobą i osobno. Do każdego słoika nalej odrobinę roztworu wodnego soli kuchennej, a następnie zakręć pokrywkę. W celu przyśpieszenia korozji umieść słoiki na grzejniku lub słonecznym parapecie. Prowadź regularne obserwacje słoików co tydzień. Zapisz wnioski. Swoje obserwacje skonsultuj z nauczycielem.

FOTOWOLTAIKA, CZYLI JAK FIZYK KORZYSTA ZE SŁOŃCA

dr inż. Paweł Zabierowski

1. Ogniwo słoneczne zasilające kalkulator kieszonkowy ma wymiary 10 mm x 50 mm. Wydajność konwersji fotowoltaicznej wynosi 15 %. Jaka musi być moc i natężenie promieniowania padającego na ogniwo, aby można było uzyskać 5 miliwatów mocy elektrycznej?

Odpowiedź:
Wydajność $\eta = P_{el} / P_{sł} \cdot 100\%$ → moc promieniowania $P_{sł} = 100\% / \eta \cdot P_{el} \approx 33$ mW.
Natężenie promieniowania $I = P_{sł} / S$, S – powierzchnia, $I \approx 6$ mW/cm^2

2. Panel fotowoltaiczny o powierzchni 1 m^2 wykonany z materiału CdTe ma wydajność 10 %. Zapotrzebowanie na energię elektryczną domu jednorodzinnego wynosi na rok około 4000 kWh. Obliczyć, jaką powierzchnię dachu należy pokryć panelami fotowoltaicznymi, aby uzyskać 50% tej wartości. Przyjąć, że nasłonecznienie wynosi średnio 1000 kWh/m^2 na rok (dane dla Polski).

Odpowiedź:
Powierzchnia $S = 0.5 \cdot 4000$ kWh / ($0.1 \cdot 1000$kWh/m^2) = 20 m^2

3. O ile mniejsza mogłaby być ta powierzchnia, gdyby wykorzystać panele z krzemu krystalicznego o wydajności 18 %.

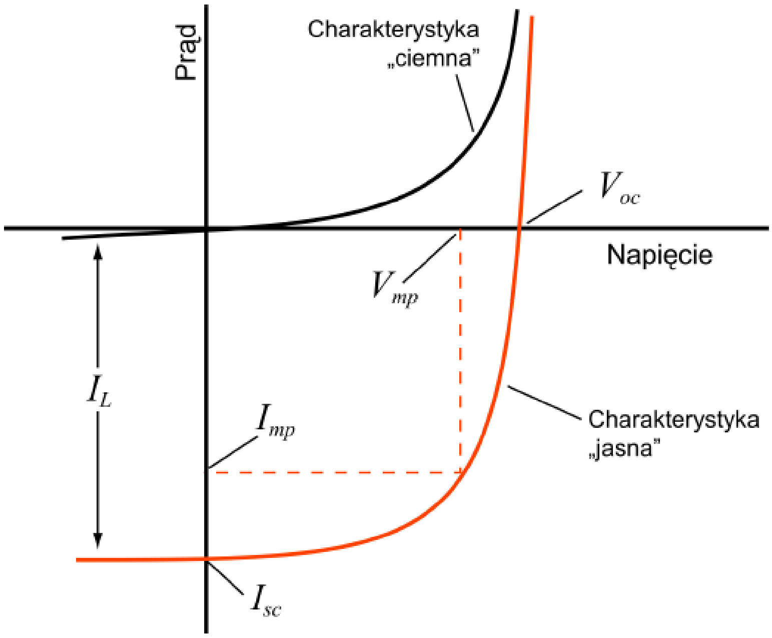
Odpowiedź.:
Prawie dwukrotnie mniejsza.

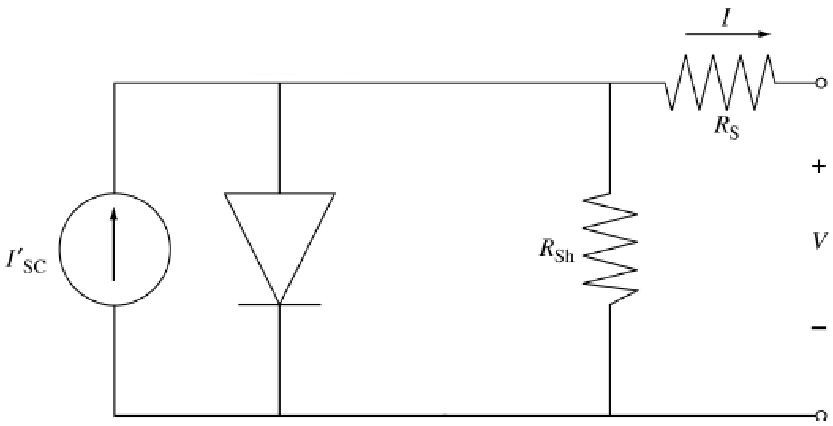
4. Narysować jasną charakterystykę prądowo-napięciową idealnego ogniwa słonecznego, zaznaczyć V_{oc}, I_{sc}, FF, punkt mocy maksymalnej. Jak zmieni się równanie i kształt charakterystyki, jeżeli w obwodzie uwzględnimy oporności szeregową (R_S)i równoległą (R_{sh}) występujące w ogniwie rzeczywistym?

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY





$$I = I'_{SC} - I_0\left[\exp\frac{q(V+IR_S)}{AkT} - 1\right] - \frac{V+IR_S}{r_{sch}}$$

Model zastępczy rzeczywistego ogniwa słonecznego.

5. Wyznaczyć eksperymentalnie parametry V_{oc} oraz I_{sc} dla ogniwa słonecznego zasilającego lampę ogrodową.

LHC - CZYLI BIG BANG W LABORATORIUM

prof. dr hab. Jan Pluta

1. Energia protonów przyspieszanych w LHC będzie wynosić 7 TeV, czyli $7*10^{12}$ elektronowoltów. Jaka będzie wtedy prędkość protonów? Jaka to będzie część prędkości światła?

Pamiętamy, że

$$E = m \cdot c^2$$

gdzie ***E*** jest pełną energią cząstki, ***m*** - jej masą, a ***c*** jest prędkością światła w próżni. Pamiętamy też, że w szczególnej teorii względności, masa cząstki zależy od jej prędkości. Mamy zależność następującą:

$$m = m_0 \cdot \gamma \qquad (1)$$

gdzie $\boldsymbol{m_0}$ jest masą cząstki nie poruszającej się, którą nazywamy "masą spoczynkową", a $\boldsymbol{\gamma}$, to tzw. **czynnik Lorentza**, który związany jest w prędkością cząstki następującą zależnością

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (2)$$

gdzie $\boldsymbol{\beta}$ jest stosunkiem prędkości cząstki ***u*** do prędkości światła w próżni ***c*** , albo inaczej mówiąc, prędkością cząstki wyrażoną w jednostkach prędkości światła. Jest to właśnie wielkość poszukiwana w naszym zadaniu.

$$\beta = \frac{\upsilon}{c}. \qquad (3)$$

Znając energię cząstki ***E*** oraz jej masę spoczynkową $\boldsymbol{m_0}$ i wartość prędkości światła w próżni ***c*** możemy wyliczyć prędkość cząstki. Wstawiając kolejno do pierwszego równania wielkości podane w następnych wzorach, otrzymujemy:

$$E = m \cdot c^2 = m_0 \cdot \gamma \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}}$$

Wyliczmy wartość $\boldsymbol{\beta}$, czyli prędkość cząstki w jednostkach prędkości światła. Kwadrat energii całkowitej może być wyrażony wzorem

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

$$E^2 = \frac{\left(m_0 \cdot c^2\right)^2}{1-\beta^2}$$

skąd wyznaczamy wartość ***β*** , wykonując przekształcenia tego wzoru:

$$1-\beta^2 = \frac{\left(m_0 \cdot c^2\right)^2}{E^2} \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = 1 - \frac{\left(m_0 \cdot c^2\right)^2}{E^2}$$

Mamy wyznaczony kwadrat prędkości, więc sama prędkość wyniesie

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\left(m_0 \cdot c^2\right)^2}{E^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 \cdot c^2}{E}\right)^2}$$

Teraz już mamy wszystko, co potrzeba. Zapiszmy dane liczbowe:

- masa spoczynkowa protonu pomnożona przez kwadrat prędkości światła, to tzw. "energia spoczynkowa" protonu. Fizycy na ogół właśnie tak wyrażają masy cząstek. (zobacz np. [*]) Wartość ta wynosi dla protonu w przybliżeniu: ***m_0c^2 = 938 MeV,***
- Energia protonu w LHC wynosi: ***E = 7 TeV = 7000 000 MeV***

Mamy zatem:

m_0c^2 / E = 938MeV / 7000000 MeV = 0.000134

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 \cdot c^2}{E}\right)^2} = \sqrt{1-(0.000134)^2} \approx 0.999999991$$

Prędkość protonów wynosić więc będzie 99.9999991 % prędkości światła w próżni(!)

Prędkość światła w próżni wynosi (zobacz np. [*]):

c = 299 792 458 m/s

(Prędkość światła w próżni, to jedna z najważniejszych stałych fizycznych. Warto zapamiętać tę wartość.) Znając wartość prędkości światła w próżni wyznaczamy łatwo prędkość protonu.

$$\upsilon = \beta \cdot c = 0.999999991 \cdot 299\,792\,458 m/s \approx 299792455\, m/s$$

Jak widzimy jest to wartość mniejsza od prędkości światła o zaledwie kilka m/s.

[*] Wikipedia - Stałe fizyczne: http://pl.wikipedia.org/wiki/Stałe_fizyczne

2. Jakie są graniczne wartości β i γ ?

Przypomnijmy sobie wzór (3) powyżej. Kiedy cząstka się nie porusza, to υ=0, a więc najmniejsza wartość β wynosi zero. Największą wartością prędkości w przyrodzie jest prędkość światła w próżni. Kiedy zaś υ=c, to β=1. Z taką prędkością poruszają

się fotony, których masa wynosi zero. Wszystkie cząstki obdarzone masą poruszają się z prędkościami mniejszymi od prędkości światła a więc dla nich zawsze β jest mniejsze od jedynki, chociaż w przypadku protonów w LHC, różnica ta jest mniejsza od jednej milionowej prędkości światła.
Czynnik Lorentza γ zdefiniowany jest wzorem (2). Widzimy, że kiedy podstawimy w nim najmniejszą wartość stosunku prędkości do prędkości światła β=0, to wówczas mieć będziemy γ=1. Kiedy β będzie zbiegać do jedynki, to γ będzie dążyć do nieskończoności.
Odpowiedź na nasze pytanie będzie więc, że dla wszystkich obiektów o niezerowej masie:

$$0 \le \beta < 1, \qquad\qquad 1 \le \gamma < \infty$$

Zwróćmy przy tym uwagę, że czynnik Lorentza γ jest miarą efektów relatywistycznych. Zgodnie ze wzorem (1) to właśnie γ jest współczynnikiem proporcjonalności w zależności masy od prędkości. Jest tak nie tylko w przypadku masy. Także zjawiska zwane "kontrakcją Lorentza" oraz "dylatacją czasu" zawierają współczynnik γ, jako miarę skrócenia długości lub wydłużenia czasu, jeśli wielkości te rozważa się w układach poruszających się względem układu spoczynkowego rozważanego przez nas obiektu.
To, że czas dla danego obiektu może być różny w rożnych układach odniesienia wydawać się może paradoksalne i praktycznie niemożliwe. A jednak fizycy widzą ten efekt np. obserwując czas życia poruszających się cząstek rejestrowanych w detektorach. Fizyka uczy nas pokory w odniesieniu do tego, czego doświadczamy naszymi zmysłami. Świat jest o wiele bardziej ciekawy niż to, co możemy zobaczyć, dotknąć lub usłyszeć. Bądźmy więc ostrożni przy formułowaniu naszych poglądów, bo chociaż wiele już wiemy, to jednak wiele jeszcze nie wiemy.

3. Ile razy energia protonu w LHC jest większa od jego energii spoczynkowej?

Zauważmy, że odpowiedzią na to pytanie jest wartość czynnika Lorentza, bowiem

$$E = m_0 \cdot c^2 \cdot \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{E}{m_0 \cdot c^2}$$

Czynnik Lorentza pokazuje właśnie ile razy energia cząstki jest większa od jej energii spoczynkowej. W naszym przypadku mamy

$$\gamma = \frac{E}{m_0 \cdot c^2} = \frac{7000000}{938} \approx 7463$$

Jak widać, w tym przypadku energia związana z masą protonu stanowi bardzo małą część jego energii całkowitej.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

4. Długość tunelu LHC wynosi *L=26.659* kilometrów. Ile razy na sekundę protony obiegną tunel, kiedy ich energia wynosić będzie *7 TeV*

Wyznaczyliśmy już prędkość protonów w LHC, która wynosi ***299 792 455 m/s***
Pamiętamy, że droga przebyta przez poruszający się obiekt, to jego prędkość pomnożona przez czas ruchu, a czas, to droga podzielona przez prędkość. Jeśli drogą będzie długość tunelu ***L***, a prędkością, prędkość w nim protonów **υ**, to czasem będzie czas jednego obiegu przez protony całej długości tunelu, który oznaczymy przez ***T***. Jeśli liczbę takich okresów czasu w ciągu jednej sekundy oznaczymy przez ***n***, to będzie: $T \cdot n = 1s \quad \Rightarrow \quad n = 1s / T = \frac{1s}{L/\upsilon}$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy:

$$\mathrm{n = 1s/(26695/\ 299792455)\ s \approx 11245}$$

Protony w ciągu jednej sekundy wykonają więc ponad 11 tysięcy obrotów w tunelu o długości prawie 27 kilometrów.

5. Poruszające się w rurze LHC protony uformowane są w "pęczki". W każdym pęczku jest ok. 100 miliardów protonów, a na obwodzie tunelu LHC jest 2808 pęczków tworzących wiązkę protonów. Jaka masa wodoru potrzebna jest do uformowania tej wiązki? Ile wiązek można byłoby uformować z jednego grama wodoru?
(W przybliżeniu można przyjąć, że cała masa atomu wodoru skupiona jest w jego jądrze.)

Tym razem przyda się znajomość masy protonów wyrażonej w kilogramach. W tablicach (zobacz np. [*]) znajdujemy: $\boldsymbol{m_p = 1{,}672\ 621\ 637(83) \cdot 10^{-27}\ kg.}$
Wszystkich protonów w wiązce jest $2808 \bullet 10^{11} = 2.802 \bullet 10^{14}$. Ich masa wynosi więc w przybliżeniu:

$$\boldsymbol{1.67 \bullet 10^{-27}\ kg \bullet 2.8 \bullet 10^{14} = 4.68 \bullet 10^{-13}\ kg = 4.68 \bullet 10^{-10}\ g}$$

Jest to masa spoczynkowa protonów tworzących wiązkę. Stosunek masy jednego grama do masy jednej wiązki, to właśnie liczba wiązek, które można uformować z masy jednego grama wodoru. Wyliczając taki stosunek otrzymamy:

$$\boldsymbol{1g / 4.68 \bullet 10^{-10}\ g = 0.21 * 10^{10}}$$

Z jednego grama wodoru można więc uformować ponad miliard wiązek.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

NANOTECHNOLOGIE – FIZYKA W SKALI NANO, NANOSTRUKTURY I ICH ZASTOSOWANIA

dr inż. Mariusz Zdrojek

1. Skąd pochodzi przedrostek „nano”?

2. Kto i kiedy po raz pierwszy wprowadził pojęcie nanotechnologii?

3. Proszę podać swój wzrost w nanometrach.

4. Wymienić znane ci produkty, które były zrobione przy użyciu nanotechnologii.

5. Co to jest grafen?

6. Parametrami opisującymi budowę nanorurek są tzw. współczynniki chiralne *n* i *m* (liczby całkowite dodatnie). Jeśli je znamy, możemy określić średnicę nanorurki *d* korzystając ze wzoru: $d = \frac{a}{\pi}\sqrt{n^2 + m^2 + nm}$ gdzie $a = a_{CC}\sqrt{3}$ natomiast a_{CC} to odległość pomiędzy sąsiednimi atomami węgla i wynosi ona *1,44 Å*. Zmierzono średnicę pewnej nanorurki, dla której wiadomo, że spełniony jest warunek *m-n=3* (nanorurka ta jest wtedy metalem) i otrzymano wynik ≈ *0.5 nm*. Znaleźć współczynniki n oraz m dla tej nanorurki.

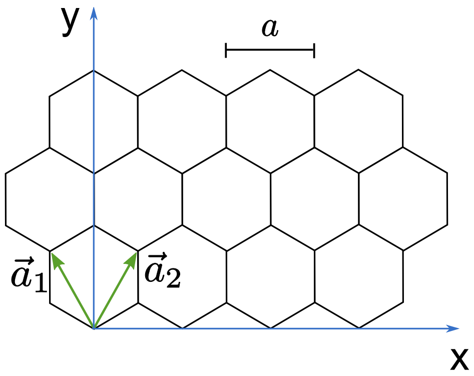
7. Oszacować w tonach masę cienkiej „nanorurkowej” liny kosmicznej o średnicy co najmniej 20 mm łączącej Ziemię i obiekt znajdujący się na wysokości 2000 km. Przyjąć gęstość nanorurek równą 1,3 g/cm^3. Sprawdzić ile razy większa byłaby masa takiej liny wykonanej ze stali.

8. Warstwę atomów węgla, która tworzy siatkę „plastra miodu” nazywamy grafenem. Taka pojedyncza warstwa pochłania około 2.3 % padającego na nią światła. Ile procent światła zostanie pochłonięte po przejściu przez 4 takie warstwy ?

9. Definicja współczynników *n* i *m* określających budowę nanorurki węglowej jest związana z wektorami $\vec{a}_1$ oraz $\vec{a}_2$ zaznaczonymi na rysunku poniżej pokazującym fragment „rozciętej” ściany nanorurki węglowej. Okazuje się, że średnica nanorurki *d,* współczynniki *n* i *m* oraz wspomniane wektory są ze sobą związane zależnością

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

$d = \frac{1}{\pi} | n\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 |$. Udowodnić wzór z zadania 6 korzystając z dołączonego rysunku oraz podanych informacji.



10. Kropkę kwantową azotku galu (GaN) można wyobrażać sobie jako sześcian o rozmiarach rzędu angstremów lub nanometrów. Dla kropek GaN o rozmiarach od 3 x 3 x 3 atomy narysować wykres określający, jaki procent ogólnej liczby atomów w kropce stanowią atomy na jej powierzchni dla różnych rozmiarów kropek. Jaką tendencję można zaobserwować ?

Rozwiązania

Zadanie 1
Nazwa przedrostka pochodzi z języka greckiego: *nanos* (νάνος) oznacza *karzeł*. Przedrostek nano używany jest w jednostkach miary o symbolu **n** oznaczający mnożnik 0,000 000 001 – jedna miliardowa.

Zadanie 2
Historia nanotechnologii sięga lat 50 ubiegłego wieku, gdy Richard P. Feynman wygłosił sławny wykład „*There's Plenty Room at the Bottom*" (w wolnym tłumaczeniu „*Tam na dole jest jeszcze dużo miejsca*"). Wtedy to próbował wyobrazić sobie, co trzeba zrobić by zmieścić 24-tomową Encyklopedię Britannikę na łebku od szpilki. Feynman przedstawił koncepcję miniaturyzacji oraz możliwości tkwiące w wykorzystaniu technologii mogącej operować na poziomie nanometrowym. Terminem nanotechnologia określany jest także nurt zapoczątkowany przez K. Erika Drexlera.

Zadanie 3
Zakładając, że nasz wzrost to 1m 70 cm i pamiętając, że 1 nanometr to 0,000 000 001 metra, możemy w prosty sposób obliczyć nasz wzrost w nanometrach: 1 700 000 000 nm

Zadanie 4
Przykłady wymienione są na prezentacji.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Zadanie 5

Grafen jest jedną z form węgla, odkrytą w 2004 roku przez Andriej Gejma i Konstantina Nowosiołowa, za co otrzymali Nagrodę Nobla w 2010 roku. Grafen zbudowany jest z pojedynczej warstwy atomów węgla. Atomy węgla tworzą w grafenie płaską, praktycznie dwuwymiarową siatkę o sześciokątnych oczkach, której struktura przypomina plaster miodu. Z uwagi na swą specyficzną budowę grafen posiada szereg unikalnych własności fizycznych i chemicznych.

Zadanie 6

Wykorzystując podane w treści zadania informacje należy znaleźć współczynniki *n* oraz *m*, które będą liczbami całkowitymi. Zapisujemy układ dwóch równań:

$$\begin{cases} d = \frac{a}{\pi}\sqrt{n^2 + m^2 + nm} \\ m - n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{a}{\pi}\sqrt{n^2 + m^2 + nm} \\ m = n + 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} d = \frac{a}{\pi}\sqrt{n^2 + (n+3)^2 + n(n+3)} \\ m = n + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{a\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{n^2 + 3n + 3} \\ m = n + 3 \end{cases}$$

Pierwsze równanie w otrzymanym układzie można przekształcić do równania kwadratowego:

$$d = \frac{a\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{n^2 + 3n + 3} \Rightarrow \frac{\pi d}{a\sqrt{3}} = \sqrt{n^2 + 3n + 3} \Rightarrow \left(\frac{\pi d}{a\sqrt{3}}\right)^2 = n^2 + 3n + 3$$

Ostatnie przejście jest poprawne, ponieważ współczynniki *n* oraz *m* są liczbami dodatnimi. Wykorzystując zależność $a = a_{CC}\sqrt{3}$ i porządkując wyrazy w ostatnim równaniu dostajemy:

$$n^2 + 3n + 3 - \left(\frac{\pi d}{3a_{CC}}\right)^2 = 0$$

Obliczamy wartość ostatniego członu po lewej stronie powyższego równania (pamiętając, że 1 nm = 10 $\mathring{A}$):

$$\left(\frac{\pi d}{3a_{CC}}\right)^2 \approx \left(\frac{3{,}14 \cdot 0{,}5nm}{3 \cdot 1{,}44\,\mathring{A}}\right)^2 = \left(\frac{3{,}14 \cdot 5\,\mathring{A}}{3 \cdot 1{,}44\,\mathring{A}}\right)^2 \approx 13{,}2$$

Wstawiamy tę wartość do równania kwadratowego, obliczamy wyznacznik Δ i znajdujemy rozwiązania.

$$\Delta = 3^2 + 4 \cdot 1 \cdot 10{,}2 = 49{,}8 \Rightarrow n = \frac{-3 + \sqrt{49{,}8}}{2} \approx 2$$

Ze względu na warunek, że *n* jest liczbą dodatnią rozwiązanie ze znakiem minus nie zostało uwzględnione. Przybliżenie w ostatnim kroku podyktowane jest natomiast ograniczeniem aby współczynniki *n* oraz *m* były liczbami całkowitymi. Ostatecznie więc: $\begin{cases} n = 2 \\ m = n + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = 5 \end{cases}$

Odpowiedź: *Współczynniki chiralne badanej nanorurki wynoszą n=2 oraz m= 5.*

Zadanie 7

Z fizycznego punktu widzenia lina stanowi walec o średnicy d= 20 mm i wysokości L=2000 km o gęstości ρ = 1,3 g/cm^3. Aby obliczyć jej masę należy posłużyć się zależnością:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

gdzie m oznacza masę liny a V jej objętość. Obliczamy V korzystając ze wzoru na objętość walca (r – promień walca):

$$V = \pi r^2 L = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 L$$

Przekształcając wzór na gęstość dostajemy:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = \rho V = \frac{1}{4}\rho \pi d^2 L$$

Podstawiamy wartości liczbowe:

$$m = \frac{1}{4}\rho \pi d^2 L \approx \frac{1}{4}\cdot 1{,}3\frac{g}{cm^3}\cdot 3{,}14\cdot (20\cdot 0{,}1cm)^2 \cdot 2000\cdot 10^6 cm \approx 8\cdot 10^9 g = 8\cdot 10^9 g = 8000 \text{ ton}$$

Masa takiej liny stalowej byłaby tyle razy większa od masy liny nanorurkowej ile razy gęstość stali jest większa od gęstości nanorurek. Dla typowej stali mamy $\rho_{st} \approx$ 8 g/cm^3 . Oznacza to że masa liny ze stali byłaby $\frac{8g/cm^3}{1{,}3g/cm^3} \approx 6$ razy większa.

Odpowiedź: *Masa liny złożonej z nanorurek wynosiłaby w przybliżeniu 8000 ton. Taka sama lina stalowa miałaby masę około 6 razy większą.*

Zadanie 8

Aby znaleźć jaki procent światła zostanie pochłonięty po przejściu przez 4 warstwy grafenu należy obliczyć stopień pochłaniania światła kolejno na każdej z warstw. Do rozwiązania zadania nie potrzeba wprowadzać pojęcia intensywności światła jednak użycie tego terminu wprowadza możliwość operowania symbolem I_0 (oznaczającym 100 % światła padającego na pierwszą warstwę), co ułatwia w pewnym stopniu zapis rozwiązania.

Po przejściu przez pierwszą warstwę zostaje pochłonięte $\frac{2{,}3}{100} I_0 = 0{,}023 I_0$ światła. Na drugą warstwę pada więc już tylko $(1 - 0{,}023) I_0 = 0{,}977 I_0$. Rachunki powtarzamy teraz analogicznie dla kolejnych warstw.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Druga warstwa pochłania: $0{,}023 \cdot 0{,}977 I_0 \approx 0{,}0225 I_0$

Na trzecią warstwę pada: $(0{,}977 - 0{,}0225) I_0 = 0{,}9545 I_0$

Trzecia warstwa pochłania $0{,}023 \cdot 0{,}9545 I_0 \approx 0{,}022 I_0$

Na czwartą warstwę pada światło $(0{,}9545 - 0{,}022) I_0 = 0{,}9325 I_0$

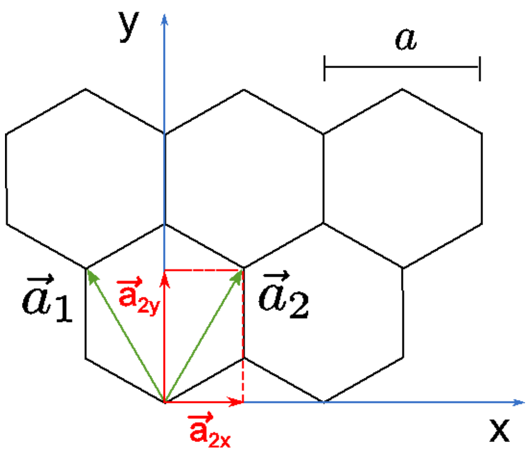
Czwarta warstwa pochłania $0{,}023 \cdot 0{,}9325 I_0 \approx 0{,}0214 I_0$

Zatem przez czwartą i ostatnią warstwę grafenu przechodzi $(0{,}9325 - 0{,}0214) I_0 = 0{,}9111 I_0$ Oznacza to, że przez cztery warstwy takiego materiału przechodzi około 91% światła, co równoważne jest absorpcji na poziomie 9%.

<u>Odpowiedź</u>: *4 warstwy grafenu absorbują około 9% światła*

Zadanie 9

Zgodnie z treścią zadania średnica nanorurki jest długością wektora $n\vec{a}_1 + m\vec{a}_2$ podzieloną przez stałą. Wektory $\vec{a}_1$ oraz $\vec{a}_2$ można znaleźć korzystając z przedstawionego w zadaniu rysunku.



Rysunek pomocniczy do rozwiązania zadania 4

Pierwszym krokiem jest wyznaczenie składowych wektorów $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ we wskazanym układzie współrzędnych. Analizując zamieszczony rysunek można stwierdzić, że składowe x obydwu wektorów mają przeciwne zwroty ale taką samą wartość. Natomiast składowe y są identyczne. Korzystając z relacji geometrycznych zachodzących w trójkącie równobocznym mamy:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{1x} + \vec{a}_{1y} = -\frac{1}{2} a\hat{x} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\hat{y} \qquad \text{oraz} \qquad \vec{a}_2 = \vec{a}_{2x} + \vec{a}_{2y} = \frac{1}{2} a\hat{x} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\hat{y}$$

gdzie $\hat{x}$ oraz $\hat{y}$ wektory jednostkowe (wersory) osi odciętych i rzędnych.

Znalezione wektory podstawiamy do wzoru z treści zadania:

$$\pi d = | n\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 | = \left| -\frac{n}{2} a\hat{x} + \frac{na\sqrt{3}}{2}\hat{y} + \frac{m}{2} a\hat{x} + \frac{ma\sqrt{3}}{2}\hat{y} \right| = \left| \frac{1}{2}(m-n)a\hat{x} + (m+n)\frac{a\sqrt{3}}{2}\hat{y} \right|$$

Aby obliczyć długość wektora należy wyciągnąć pierwiastek drugiego stopnia z sumy kwadratów współrzędnych tego wektora. A zatem:

$$\pi d = \sqrt{\frac{a^2}{4}(m-n)^2 + \frac{3a^2}{4}(m+n)^2} = a\sqrt{n^2 + m^2 + nm}$$

Po przeniesieniu π na prawą stron równania otrzymujemy zależność z zadania 6, którą należało udowodnić.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

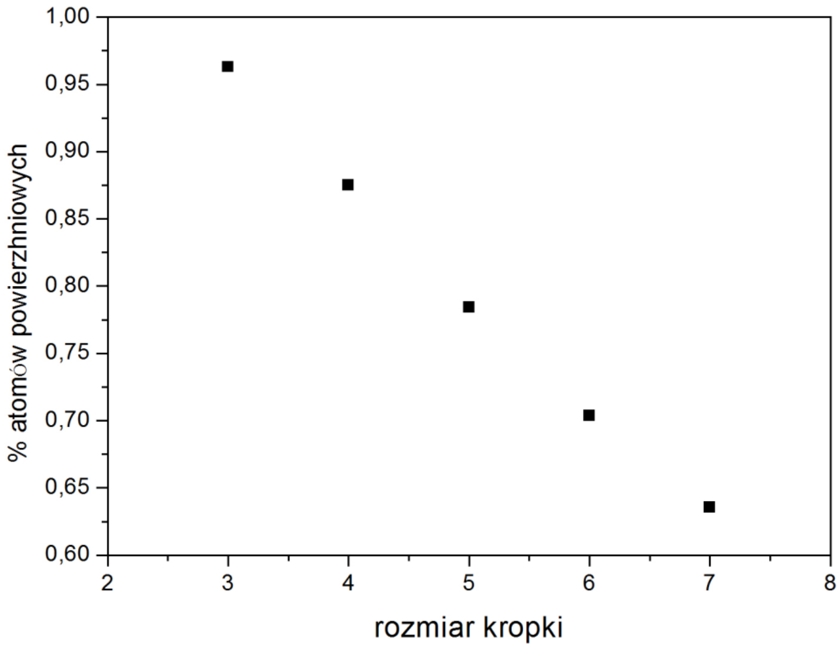
Mazowiecki Kurator Oświaty

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zadanie 10

Wykres, o którym mowa w treści zadania należy wykonać dla kilku rozmiarów kropek kwantowych tak, aby móc zauważyć, jaki rodzaj zależności obowiązuje pomiędzy procentem atomów powierzchniowych a rozmiarem kropki. Wygodnie jest wykonać małą tabelkę.

rozmiar kropki	3x3x3	4x4x4	5x5x5	6x6x6	7x7x7
wszystkie atomy	3^3=27	4^3=64	5^3=125	6^3=216	7^3=343
atomy powierzchniowe	3^3-1^3=26	4^3-2^3=56	5^3-3^3=98	6^3-4^3=152	7^3-5^3=218
% atomów na powierzchniowych	$\frac{26}{27} \approx 96\%$	$\frac{56}{64} \approx 88\%$	$\frac{98}{125} \approx 78\%$	$\frac{152}{216} \approx 70\%$	$\frac{218}{343} \approx 63\%$



Wraz ze wzrostem ogólnej liczny atomów maleje ułamek atomów stanowiących powierzchnię kropki kwantowej. W ogólności stosunek, o którym mowa (nazwijmy go jako *p*) można wyrazić wzorem (słusznym dla dowolnego rozmiaru kropki n > 1) mającym postać:

$$p[\%] = \frac{n^3 - (n-2)^3}{n^3} \cdot 100\% = \frac{6n^2 - 12n + 8}{n^3} \cdot 100\%$$

Aby zrozumieć skąd wynika postać licznika w powyższym wzorze najlepiej narysować atomowe schematy kilku kropek kwantowych.

Widać, że dla dużych wartości n procent atomów powierzchniowych staje się znikomy (np. dla n= 30 wartość *p* wynosi już tylko około 2%).

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

OPTYCZNE PODSTAWY NIEWIDZIALNOŚCI

dr inż. Piotr Lesiak

**(we współpracy z mgr inż. Anną Maksimowską
nauczycielką fizyki w I LO im. gen. J. Bema w Ostrołęce)**

Pytanie 1.

Kąt odbicia jest równy:

a) kątowi padania
b) kątowi załamania
c) stosunkowi kątów padania i załamania
d) stosunkowi sinusów kątów padania i załamania

Prawidłowa odpowiedź: **a)**

Pytanie 2.

Współczynnik załamania światła jest równy:

a) kątowi padania
b) kątowi załamania
c) stosunkowi kątów padania i załamania
d) stosunkowi sinusów kątów padania i załamania

Prawidłowa odpowiedź: **d)**

Pytanie 3.

Kiedy mamy do czynienia z całkowitym wewnętrznym odbiciem:

a) kiedy światło odbija się od powierzchni metalu
b) gdy światło wchodzi z ośrodka optycznie gęstszego do ośrodka optycznie rzadszego
c) gdy światło wchodzi z ośrodka optycznie rzadszego do ośrodka optycznie gęstszego
d) gdy gęstości optyczne ośrodków są takie same

Prawidłowa odpowiedź: **b)**

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

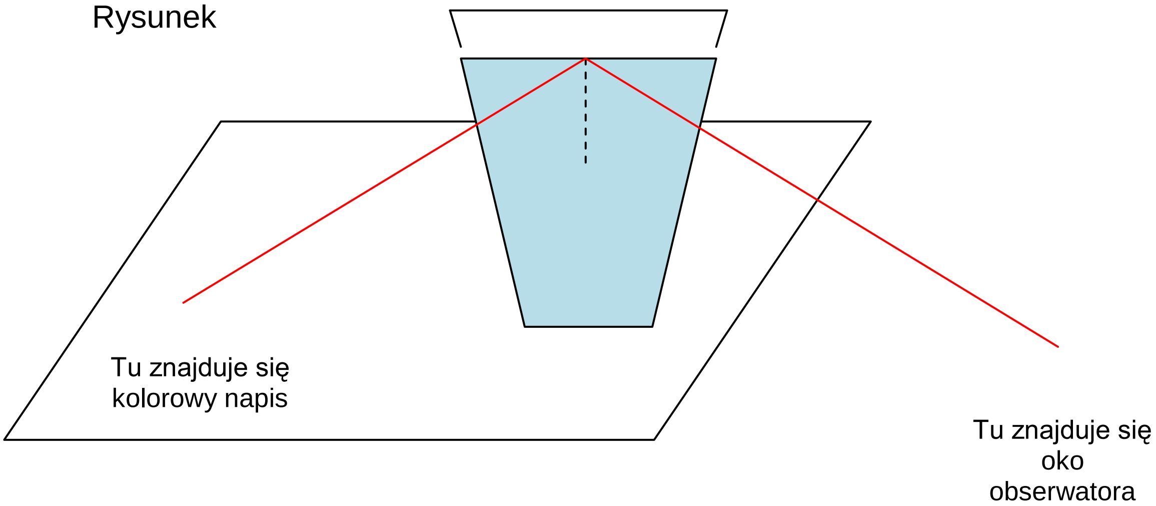
Zadanie 4.

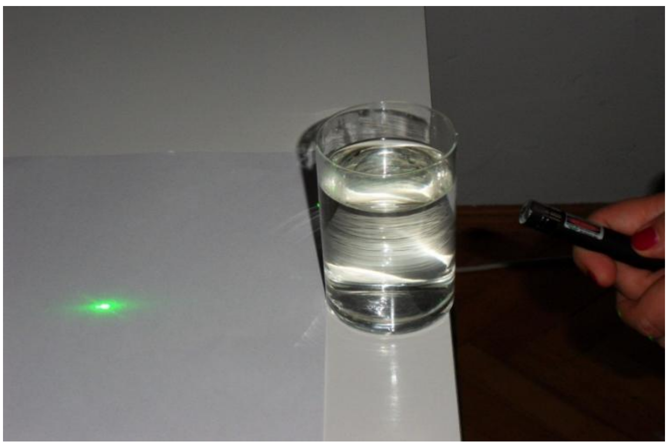
Całkowite wewnętrzne odbicie światła od powierzchni wody można w bardzo prosty sposób zademonstrować.

Potrzebne przedmioty: przezroczysta szklanka z wodą, obiekt do obserwacji, np. kolorowy napis, tekst z gazety.

Wykonanie:
Szklankę z wodą ustawiamy blisko krawędzi stołu. Na stole za szklanką kładziemy napis. Kucamy i patrzymy na powierzchnię wody od strony wody (rysunek). Jeżeli spojrzymy pod odpowiednim kątem, to na powierzchni wody obserwujemy obraz naszego przedmiotu tak, jak w lustrze. Sama powierzchnia wody jest wtedy nieprzezroczysta.
Można też na powierzchnię wody (od strony wody) skierować promień światła ze wskaźnika laserowego. Odbije się on od powierzchni wody, jak od zwierciadła i znajdzie się na stole (zdjęcie).

Rysunek



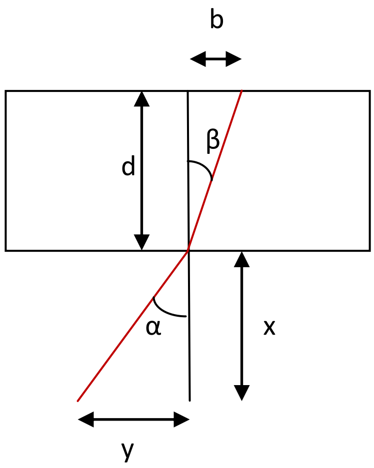


Zdjęcie

Zadanie 5.

Wyznaczenie współczynnika załamania światła płytki wykonanej z plexi.
Potrzebne przyrządy i materiały: Płytka płasko – równoległa wykonana z plexi lub szkła (można wypożyczyć z pracowni fizyki w szkole), kartka papieru milimetrowego, kolorowe pisaki, linijka, wskaźnik laserowy.

Przebieg doświadczenia:
Doświadczenie rozpoczynamy od narysowania pionowej kreski na płytce. Następnie na kartce z bloku milimetrowego rysujemy przedłużenie tej kreski. Kolejnym etapem jest zagięcie końcówki kartki (zrobienie ekranu). Następnie rysujemy trzy kropki na papierze milimetrowym przed płytką i za pomocą wskaźnika laserowego wyznaczamy punkt w którym pojawiają się one na ekranie. Wyznaczamy wartości sinusa kąta padania (sinα) i sinusa kąta załamania(sinβ). Następnie obliczamy współczynnik załamania światła $n = \frac{sin\alpha}{sin\beta}$.



Przykładowe pomiary:
Odczytaliśmy z papieru milimetrowego wartość x, d oraz wartości y i b dla kolejnych promieni (zaznaczane kropkami na papierze milimetrowym).

$$sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$sin\beta = \frac{b}{\sqrt{d^2 + b^2}}$$

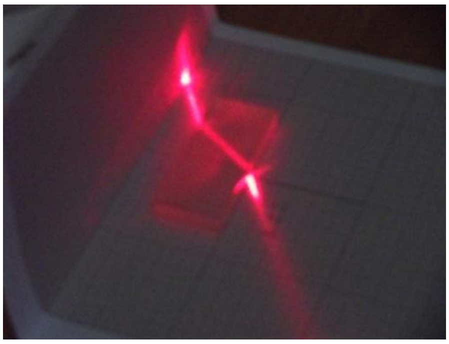
Wykonane pomiary i wyniki obliczeń zestawione zostały w tabeli:

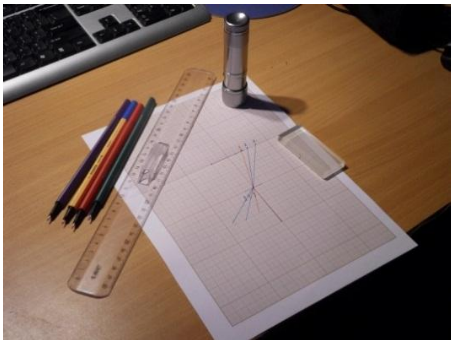
x=10mm

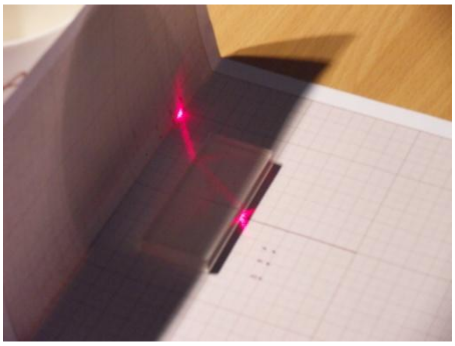
d=32mm

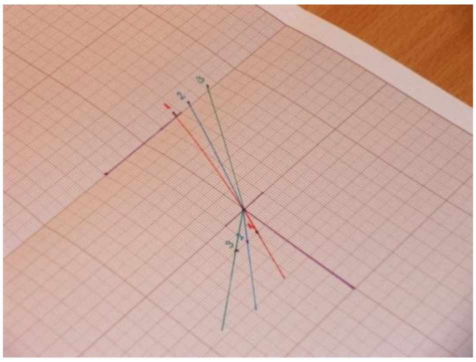
Nr promienia	y, (mm)	sinα	b, (mm)	sinβ	n
1	4	0,37	10	0,30	1,23
2	6	0.51	14	0,40	1,28
3	7	0,57	18	0,49	1,16

$$n_{śr} = \frac{n_1+n_2+n_3}{3} = 1,22$$









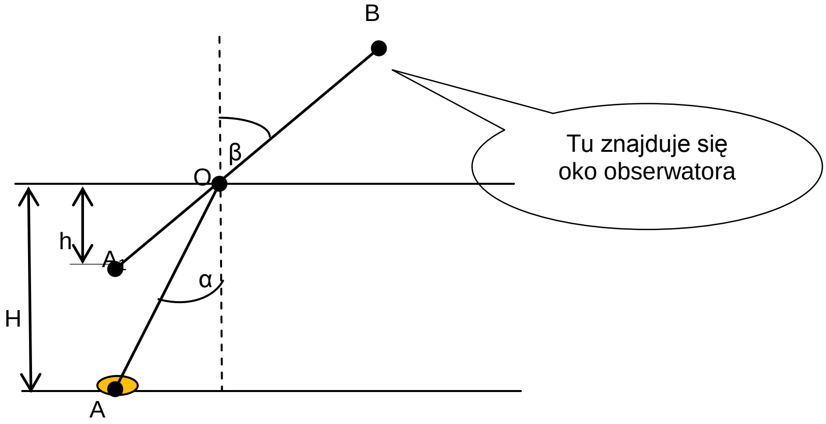
Wnioski:
Pomysłem, który pozwolił na wykonanie tego doświadczenia, było wykorzystanie papieru milimetrowego zarówno jako ekranu, jak i miernika odległości.
Uzyskana wartość współczynnika załamania $n_{śr} = 1,22$ zgadza się z wartościami tablicowymi (dla szkła bądź plexi, z którego była wykonana płytka, współczynnik załamania zawiera się w granicach od ok. 1,1 do 1,8 w zależności od materiału).

Zadanie 6.

Na dnie nieprzezroczystego naczynia umieszczamy monetę, w taki sposób, żeby była niewidoczna. Nie zmieniając położenia swojego wzroku nalewamy wodę do naczynia (na tyle ostrożnie, aby moneta nie przesunęła się przy tym). Po nalaniu wody moneta stanie się widoczna. Wyjaśnij dlaczego?

Odpowiedź:

Światło, odbijane od monety (punkt A na rysunku), rozchodzi się we wszystkich kierunkach. Pewna wiązka promieni pada od spodu na powierzchnię wody w punkcie O, załamuje się na powierzchni i trafia do naszego oka w punkcie B. Oko rzutuje punkt A do punktu A_1 i wydaje nam się, że moneta znajduje się na głębokości h, a nie tak, jak jest w rzeczywistości na głębokości H.



Wykorzystując prawo załamania światła oraz znajomość trygonometrii można obliczyć tę głębokość. Tu ograniczamy się tylko do rozwiązania jakościowego.

Uwaga: Zwróćmy uwagę, że do oka trafia nie jeden promień, ale cała wiązka promieni, której przekrój jest ograniczony przez źrenicę oka. Jednak wiązka ta jest tak wąska, że możemy jej przekroju nie brać pod uwagę traktując ją jako linię AOB.

CHEMIA

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

„NIE ŚWIĘCI GARNKI LEPIĄ...”

Prof. dr hab. inż. Mikołaj Szafran
Wydział Chemiczny Politechniki Warszawskiej
Zakład Technologii Nieorganicznej i Ceramiki

Przedstawiony w wykładzie materiał wykracza w większości poza program szkolny. Radziłbym przy opracowaniu proponowanych tu tematów uzupełnić wiadomości w internecie.

1. Zastanów się i spróbuj podzielić wyroby ceramiczne obecne w Twoim domu na grupy wg podziału przedstawionego na str. 2.
W podręczniku do niniejszego wykładu są też przykłady wyrobów ceramicznych przypisanych do poszczególnych grup.

2. Napisz referat na temat historii porcelany i roli jaka odegrało to tworzywo nie tylko w domu ale także w technice .

3. Przedstaw historię cementu i rolę jaką to tworzywo odgrywa obecnie.
Wynaleziony przez Rzymian około 2000 lat temu, potem zapomniany. Ponownie odkryty w XIX w. w Wielkiej Brytanii. Otrzymywany z cementu beton, zbrojony prętami stalowymi, spowodował rewolucję w budownictwie (domy, mosty, tamy)

4. Wymień i opisz główne etapy procesu otrzymywania wyrobów ceramicznych.
a. Otrzymywanie surowców: np. wydobycie i oczyszczanie minerałów lub uzyskiwanie proszków ceramicznych na drodze reakcji chemicznych.
b. Formowanie kształtu: np. prasowanie, odlewanie, wtrysk, wytłaczanie.
c. Wypalanie: czas ogrzewania, czas i temperatura wypalania i czas studzenia decydują o jakości wyrobu. Parametry te zależą od rodzaju materiału ceramicznego.

SŁOWNIK

Ceramika - materiały nieorganiczne i niemetaliczne, które otrzymane zostały w wyniku procesu polegającego na tym, że drobnoziarniste proszki ceramiczne formuje się w żądany kształt i kształt ten utrwala się w procesie wypalania w wysokiej temperaturze.

Nanoproszki - tu materiały ceramiczne o umownie wytyczonej granicy wymiarowej od 0,1 do 100nm. Ze zmniejszenia wymiarów do nanoskali wynikają nowe właściwości i możliwości technologiczne.

Tapecasting – metoda odlewania folii ceramicznych.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Gelcasting – metoda odlewania kształtek ceramicznych w połączeniu z reakcją polimeryzacji.

Amfifilowe polimery – polimery o właściwościach hydrofobowych i hydrofilowych.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

CHEMIA DLA OPORNYCH – IGRANIE Z OGNIEM

dr inż. Z. Dolecki

1. Zbierzcie wycinki prasowe dotyczące chemii i wspólnie przedyskutujcie zamieszczone w nich informacje. Które są rzetelne, a które nie i dlaczego?

   To problem otwarty. Zebrane wycinki mogą dotyczyć chemii bezpośrednio lub pośrednio. Mogą też okazać się niezwiązane z chemią. Rzetelność lub nierzetelność najczęściej wynika z niepełnej, jednostronnej informacji. Warto podkreślić, że w każdym przypadku należy przedyskutować bilans zjawisk pozytywnych i negatywnych.

2. Proces spalania może być niebezpieczny. Jakie warunki muszą być spełnione, żeby można było bezpiecznie rozpalić ognisko. Kto pamięta numer telefonu do straży pożarnej?

   – *Teren: otwarty, miejsce odległe od lasu, materiałów łatwopalnych, najlepiej okopane dookoła. Nie rozpalamy na balkonie, w lesie, na stacji benzynowej itp. Dobrze byłoby mieć wodę do zagaszenia ogniska.*
   – *Pogoda: nie palimy gdy jest susza lub silny wiatr.*
   – *Ludzie: dzieci mogą to robić w obecności dorosłych, nikt nie powinien być pod wpływem alkoholu lub narkotyków.*
   – *Straż pożarna: 998, 112.*

3. Dwutlenek węgla powstający w procesie spalania jest jednym z czynników powodujących ocieplenie klimatu. Na czym polega to zjawisko?

   Atmosfera ziemska przepuszcza większość krótkofalowego promieniowania słonecznego. Na powierzchni ziemi to promieniowanie zamienia się na ciepło. Promieniowanie cieplne ziemi jest zatrzymywane przez atmosferę i zwracane. Zjawisko zależy od składu atmosfery. Dwutlenek węgla zwiększa efekt cieplarniany, co powoduje ogólne ocieplenie i zmiany klimatyczne.

4. Jak można zapobiegać wymienianym w ulotce o DHMO rzeczywistym zagrożeniom?

   Kąpać się w miejscach strzeżonych. Dbać o czystość atmosfery (kwaśne deszcze).Budować zbiorniki retencyjne, wały ochronne i poldery (powodzie).

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Lokalizować instalacje nuklearne w głębi lądu (tsunami). Itp.

5. Wymieńcie i opiszcie zjawiska fizyczne towarzyszące prezentowanym w wykładzie doświadczeniom.

Wzbudzanie elektronów sodu i litu. Topienie metali i szkła. Wymiana ciepła.

SŁOWNIK

spalanie - proces gwałtownego łączenia substancji palnej z tlenem: towarzyszy temu wydzielanie się dużej ilości energii w postaci ciepła i światła.

flogiston - wg. teorii z 2 połowy XVII w. nieważka substancja zawarta w każdej substancji palnej i wydzielająca się podczas spalania.

A. Lavoisier - francuski uczony z 2 połowy VIII w. Wykazał, że spalanie polega na łączeniu się substancji spalanej z tlenem. Sformułował prawo zachowania masy.

Westa - rzymska bogini domowego ogniska czczona pod postacią wiecznie płonącego ognia w okrągłej świątyni na Forum Romanum.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

„W POSZUKIWANIU NICI ARIADNY”

dr inż. Mariusz Tryznowski

1. Proszę podać dwa zjawiska podczas których następuje wydzielenie energii na sposób ciepła do otoczenia

Odpowiedź:
Rozcieńczanie silnych kwasów lub rozpuszczanie wodorotlenków w wodzie, spalanie substancji organicznych w tlenie

2. Do poniższych przykładów proszę dopisać jaki odczyn posiada roztwór zawierający w przewadze określony rodzaj jonów:
$[H^+] > [OH^-]$, b) $[H^+] < [OH^-]$, c) $[H^+] = [OH^-]$, d) $[OH^-] = 1 \cdot 10^{-8}$ mol/dm^3

Odpowiedź:
a – odczyn kwaśny, b – odczyn zasadowy, c – odczyn obojętny, d - odczyn kwaśny

3. Które rozpuszczalniki możemy zaliczyć do związków polarnych: woda, alkohol metylowy, heksan, kwas octowy, toluen, ksylen

Odpowiedź:
woda, alkohol metylowy, kwas octowy

4. Do purpurowego wodnego roztworu fenoloftaleiny wprowadzamy związek, który powoduje odbarwienie roztworu. Wprowadzony związek to:
H_2O, b) NaOH, c) HCl, d) NaCl, e) $C_6H_{12}O_6$ (glukoza)

Odpowiedź:
W środowisku kwaśnym fenoloftaleina jest bezbarwna prawidłowa odpowiedź c.

5. Wprowadzając do 200g wody trzy sole (10g chlorku sodu, 10g siarczan (VI) niklu, 10g dichromianu(VI) potasu) otrzymujemy w wyniku rozpuszczania roztwór jednorodny. Czy można „odzyskać” z roztworu każdą z trzech soli? Jeśli wiemy że: w 100g wody w temperaturze 25°C rozpuszcza się 12,3g dichromianu(VI) potasu lub 36g chlorku sodu lub 65g siarczanu VI niklu, to czy rozpuszczalność będzie miała wpływ na kolejność wydzielania się tych soli?

Odpowiedź:
W wyniku powolnego odparowania rozpuszczalnika następuje zatężanie roztworu,

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

prowadzące do uzyskania roztworu nasyconego. Roztwór nasycony to taki, w którym w danych warunkach nie może się nic więcej rozpuścić. Dlatego dalsze odparowanie rozpuszczalnika będzie prowadziło do wykrystalizowania soli. Najmniejszą rozpuszczalność posiada dichromian(VI) potasu dlatego jako pierwszy będzie krystalizował z roztworu nasyconego. Następnie będzie krystalizował dichromian(VI) potasu i chlorek sodu, a na końcu wszystkie trzy sole.

SŁOWNIK

Chromatografia cienkowarstwowa (TLC) – metoda analityczna wykorzystywana do identyfikacji związków. Polega na naniesieniu badanej substancji na płytkę chromatograficzną, rozwinięciu płytki w odpowiednim rozpuszczalniku a następnie uwidocznieniu rozdzielonych substancji przy pomocy odpowiedniego wywoływacza.

Sudan III – barwnik organiczny rozpuszczalny wyłącznie w związkach niepolarnych typu tłuszcze lub węglowodory.

Równanie kinetyczne - to równanie przedstawione w formie różniczkowej opisujące zmiany stężenia substratów w czasie zachodzenia reakcji chemicznej w stałej temperaturze.

Izomeryzacja – możliwość przekształcenia się jednego związku w drugi bez zmiany składu ilościowego i jakościowego.

Suchy lód – zestalony dwutlenek węgla, który przechodzi bezpośrednio w fazę gazową z pominięciem cieczy.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

JAK ODRÓŻNIĆ pH OD PECHA?

dr inż. Łukasz Górski

Zadanie 1.

Oblicz stężenie jonów wodorowych w czystej chemicznie wodzie oraz jej pH, znając stałą autodysocjacji wody K = 1,8 • 10^{-16}.

Rozwiązanie:
Obliczamy stężenie molowe wody w wodzie:
M_{H2O} = 18 g/mol
d_{H2O} = 1 g/cm^3
V = 1 dm^3 = 1000 cm^3
m = 1000 cm^3 • 1 g/cm^3 = 1000 g
n = 1000 g / 18 g/mol = 55,56 mola
Cm = 55,56 mol / 1 dm^3 = 55,56 mol/dm^3
$K = [H^+] \cdot [OH^-] / [H_2O] = 1{,}8 \cdot 10^{-16}$
$K \cdot [H_2O] = [H^+] \cdot [OH^-]$
$K \cdot [H_2O] = 1{,}8 \cdot 10^{-16} \cdot 55{,}56$ mol/dm^3 = 10^{-14} mol/dm^3 = $[H^+] \cdot [OH^-]$

Z równania autodysocjacji wody:
$H_2O \rightarrow H^+ + OH^-$
wynika, że $[H^+] = [OH^-]$, stąd:
$[H^+] \cdot [OH^-] = [H^+]^2 = 10^{-14}$mol/dm^3
$[H^+] = 10^{-7}$mol/dm^3
Z uproszczonej definicji pH:
$pH = -\log c_{H+} = -\log 10^{-7} = 7$

Zadanie 2.

Oblicz pH roztworu kwasu solnego o stężeniu 10^{-8} mol/dm^3.

Rozwiązanie:
Stężenie jonów wodorowych z autodysocjacji wody: 10^{-7} mol/dm^3.
Stężenie jonów wodorowych z dysocjacji kwasu solnego (kwas mocny, dysocjacja zachodzi całkowicie): 10^{-8} mol/dm^3.
Całkowite stężenie jonów wodorowych: 10^{-7} mol/dm^3 + 10^{-8} mol/dm^3 = 0,00000011 mol/dm^3.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Z uproszczonej definicji pH:
pH = -log c_{H+} = -log 0,00000011 = 6,95

Zadanie 3.

Sprawdź możliwość zastosowania naparu z czarnej herbaty jako wskaźnika kwasowo-zasadowego.

Wykonanie:
Przygotować niezbyt mocny napar z czarnej herbaty, ostudzić go. Przelać do dwu zlewek lub przeźroczystych szklanek. Do jednej z nich dodać niewielką ilość dowolnego kwasu (może być sok z cytryny), obserwować rozjaśnianie się barwy naparu. Do drugiej zlewki dolać substancji o charakterze zasadowym (może być soda oczyszczona) i obserwować ciemniejszą barwę naparu.

Wniosek:
napar z czarnej herbaty może być zastosowany jako wskaźnik kwasowo-zasadowy.

Zadanie 4.
Oblicz stężenie molowe kwasu ortofosforowego(V) w napoju typu Cola, jeżeli na zmiareczkowanie próbki o objętości 10 cm^3 wobec tymoloftaleiny jako wskaźnika zużyto 4,2 cm^3 roztworu NaOH o stężeniu 0,1000 mol/dm^3.

Rozwiązanie:
Przy zastosowaniu tymoloftaleiny jako wskaźnika, reakcja przebiega według równania:
$H_3PO_4 + 2NaOH \rightarrow Na_2HPO_4 + 2H_2O$
Obliczamy ilość zużytego wodorotlenku sodu:
V = 4,3 cm^3 = 0,0043 dm^3
Cm = 0,1 mol/dm^3
n = 0,0043 dm^3 • 0,1 mol/dm^3 = 0,00043 mol
Na podstawie równania reakcji, ilość moli kwasu fosforowego jest dwukrotnie mniejsza:
n_{H3PO4} = 0,000215 mola
Ta ilość kwasu znajduje się w 10 cm^3 (0,01 dm^3) Coli, stąd stężenie:
Cm = 0,000215 mola / 0,01 dm^3 = 0,0215 mol/dm^3

Zadanie 5.

Zaproponuj skład roztworu, który będzie miał prawie stałe pH, nawet po dodaniu niewielkich ilości mocnego kwasu lub zasady (roztwór buforowy). Na podstawie odpowiednich równań reakcji wyjaśnij zasadę utrzymywanie pH przez taki roztwór.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Rozwiązanie:
Roztwory buforowe to roztwory słabych kwasów i ich soli lub słabych zasad i ich soli. Często stosowany jest np. bufor octanowy, będący roztworem kwasu octowego i octanu sodu. Zasada działania:

$CH_3COOH + NaOH \rightarrow CH_3COONa + H_2O$

Dodana do roztworu buforowego zasada jest zobojętniana przez kwas octowy.

$CH_3COONa + HCl \rightarrow CH_3COOH + NaCl$

Dodany do roztworu kwas wypiera z soli słaby kwas octowy, a więc jony wodorowe są wiązane przez anion octanowy.

SŁOWNIK

pH – ujemny logarytm aktywności jonów wodorowych w badanym roztworze.

kwas (wg Arrheniusa) – substancja odszczepiająca jony wodorowe w roztworach wodnych.

zasada – (wg Arrheniusa) – substancja odszczepiająca jony wodorotlenowe w roztworach wodnych.

chemia analityczna – dział chemii zajmujący się ilościowym i jakościowym określaniem składu próbek.

miareczkowanie – technika analityczna polegająca na stopniowym dodawaniu roztworu reagenta (titranta) z biurety do badanej próbki. Ilość oznaczanej substancji jest określana na podstawie ilości i stężenia titranta zużytego w reakcji.

pH-metr – urządzenie służące do pomiaru pH próbek. Jest to zazwyczaj czuły miliwoltomierz, mierzący potencjał elektrody czułej na pH (np. elektrody szklanej).

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

NIECH MOC BĘDZIE Z WAMI – PROBLEMY ENERGETYCZNE

Prof. dr hab. inż. Krzysztof Krawczyk

Przedstawiony w wykładzie materiał wykracza w większości poza program szkolny. Radziłbym przy opracowaniu proponowanych tu tematów uzupełnić wiadomości w internecie.

1. W jaki sposób można ograniczać szkody ekologiczne powstające przy otrzymywaniu energii z węgla?

Największym problemem jest to, że w przeciwieństwie do paliw płynnych i gazowych, nie można przed spalaniem oczyścić węgla z różnych domieszek. Stąd w gazach spalinowych obecność pierwiastków promieniotwórczych i metali ciężkich. Powstają też wielkie ilości pyłów i popiołu. Sposobem na to jest zgazowanie węgla. Pod działaniem pary wodnej można otrzymać CO i H_2. Gaz ten można spalać lub otrzymywać z niego benzynę syntetyczną. Są to jednak procesy na dzień dzisiejszy dość drogie.

2. W wykładzie stwierdzono, że 10 g antracytu wydziela przy spalaniu energię wystarczającą do ogrzania 1 litra wody od 25^{o}C do 100^{o}C. Jednak w rzeczywistości nie uda się zagotować tej ilości wody – dlaczego?

Każdy proces wymiany ciepła przebiega z wydajnością mniejszą niż 100%. Oprócz ogrzewania wody ogrzewamy naczynie i otoczenie. Ogrzewanie wody bez strat ciepła jest w rzeczywistych warunkach niemożliwe.

3. Jednym ze sposobów ograniczenia problemów związanych z deficytem energii jest jej oszczędzanie. W jaki sposób ty możesz oszczędzać energię?

To problem otwarty i mający wiele aspektów. Przedstawię kilka propozycji. Wymiana żarówek na energooszczędne źródła światła, gaszenie światła w pomieszczeniach, w których aktualnie nie przebywamy. Wyłączanie zasilania urządzeń elektronicznych (telewizory, komputery itp.) zamiast pozostawiania ich w stanie czuwania, wyjmowanie z gniazda ładowarek. Korzystanie z komunikacji publicznej zamiast z samochodu. Wymiana nieszczelnych okien. Bardzo istotne, a rzadko zauważane jest to, że wszystko z czego korzystamy wymaga energii w procesie wytwarzania. Stąd oszczędne korzystanie z wszelkich dóbr, recykling to też oszczędzanie energii.

4. Przedstaw korzyści i szkody wynikające otrzymywania energii w elektrowniach jądrowych.

Główne zalety:

- Brak emisji jakichkolwiek zanieczyszczeń w czasie pracy
- Sto tysięcy razy mniejsza, w porównaniu z węglem, ilość paliwa na tę samą ilość wytworzonej energii,
- Zasoby paliwa jądrowego wystarczające na ponad 1000 lat

Główne wady:

- W przypadku poważnej awarii lub aktu terroru skutkiem może być rozległe i długotrwałe skażenie.
- Zużyte paliwo przez długi czas pozostaje aktywne i musi być specjalnie składowane i chronione.
- Niezależnie od źródła energii cieplnej proces otrzymywania prądu przebiega w podobny sposób. Przedstaw i omów działanie elektrowni.

Ciepło uzyskiwane przez spalanie węgla, ropy lub gazu, ciepło z reakcji jądrowych czy ciepło skoncentrowanego światła słonecznego służy do ogrzania wody i wytworzenia pary. Para porusza turbiny, a te z kolei napędzają generator prądu, kierowanego następnie do sieci przesyłowej.

SŁOWNIK

Reaktor LWR - reaktor jądrowy pracujący w cyklu otwartym, paliwo po cyklu pracy jest odpadem.

Reaktor FBR - reaktor jądrowy pracujący w cyklu zamkniętym, paliwo po cyklu pracy jest regenerowane.

Fischera-Trpscha metoda - proces technologiczny otrzymywania benzyny z produktów zgazowania węgla (CO i H_2).

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

CO W KOMÓRCE PISZCZY - RZECZ O MINIATUROWYCH BATERIACH LITOWYCH I LITOWO-JONOWYCH

Prof. Władysław Wieczorek

Zadania tekstowe:

Zadanie 1

Czy stosując baterię zawierającą elektrolit o przewodności jonowej $1x10^{-4}\ \Omega^{-1}\ cm^{-1}$ i wymiarach powierzchnia czynna elektrod $100cm^2$ i grubość elektrolitu 100μm możemy prądem o napięciu 1 $mAcm^{-2}$ zasilić silnik samochodu zabawki o napięciu pracy 3V. Przyjmujemy, że SEM baterii wynosi 3. 6V

Dane:

$\delta_e=1x10^{-4}\ \Omega^{-1}\ cm^{-1}$

$S= 100\ cm^2$

l= 100μm

SEM= 3.6V

$i= 1\ mAcm^{-2}$

Szukane

Czy U> 3V

Rozwiązanie:

Aby bateria mogła zasilić silnik samochodu zabawki jej napięcie pracy musi być wyższe od napięcia zasilania samochodu. Obliczmy więc napięcie pracy baterii. W tym celu obliczamy najpierw opór omowy elektrolitu korzystając ze wzoru:

$R_e = 1/\delta_e * l/S$

Podstawiając odpowiednie dane i pamiętając, że $1μm=10^{-4}$ cm otrzymujemy:

$R_e = 1\ \Omega$

Stosując wzór na napięcie pracy ogniwa

$U = SEM – IR_c= SEM - iSR_e$

I podstawiając odpowiednie dane uzyskujemy

U= 3.5 V> 3V

Zatem przy założonych w zadaniu parametrach pracy bateria może zasilić silnik samochodu zabawki.

Zadanie 2

Jaka powinna być minimalna przewodność jonowa elektrolitu o wymiarach: grubość

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

100µm, powierzchnia aktywnego styku z elektrodami 100 cm^2, żeby spadek omowy baterii z której jest pobierany prąd o gęstości 10mAcm^{-2} był mniejszy od 0.5 V.

<u>Dane</u>
$S = 100\ cm^2$
$l = 100 \mu m$
$i = 10\ mAcm^{-2}$

<u>Szukane</u>
Przy jakim δ_e $\Delta U = iSR_e < 0.5V$

<u>Rozwiązanie:</u>
Ponieważ spadek omowy w baterii opisywany jest równaniem (1)
$\Delta U = iSR_e < 0.5V$ (1)
Gdzie wartość oporu elektrolitu określona jest równaniem (2)
$R_e = 1/\delta_e * l/S$ (2)
To podstawiając równanie (2) do równania (1) i przekształcając uzyskujemy (3)
$\Delta U = il/\ \delta_e < 0.5V$ (3)
Zatem po przekształceniu równania (3) uzyskujemy następujący warunek opisujący wartość granicznej przewodności jonowej elektrolitu
$\delta_e > il/\ \Delta U$
Podstawiając dane liczbowe i pamiętając, że $1\mu m = 10^{-4}$ cm otrzymujemy:
$\delta_e > 2\ 10^{-3}\ \Omega^{-1}\ cm^{-1}$

<u>Zadanie 3</u>
Jaka jest moc baterii z której czerpiemy prąd o gęstości 1 mAcm^{-2} zawierającej elektrolit o parametrach:
grubość 100µm
powierzchnia czynna styku z elektrodami 100 cm^2
przewodność jonowa $1x10^{-3}\ \Omega^{-1}\ cm^{-1}$
Przyjmujemy, że siła elektromotoryczna ogniwa wynosi 3.6V a napięcie pracy ogniwa wynika tylko ze spadków omowych.

<u>Dane</u>
$l = 100 \mu m$
$S = 100\ cm^2$
$\delta_e = 1x10^{-3}\ \Omega^{-1}\ cm^{-1}$
SEM= 3.6V

<u>Szukane</u>
Moc czerpana z ogniwa P?

<u>Rozwiązanie</u>
Moc czerpana z baterii wyrażone jest wzorem (1)
$P = U*I$ (1)
Gdzie wartość napiecia pracy ogniwa przedstawiona jest wzorem (2)
$U = SEM - IR_c = SEM - iSR_e$(2)

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Z kolei opór elektrolitu opisany jest wzorek (3)

$R_e = 1/\delta_e * l/S$ (3)

Wstawiając wzór (3) do wzoru (2) a następnie do wzoru (1) i przekształcając otrzymujemy (4)

$U = SEM - il/\delta_e$ (4)

Podstawiając dane liczbowe i pamiętając, że 1µm=10^{-4} cm otrzymujemy:

U=2.6V

A zatem:

P= U*I = UiS= 2.6V x10A= 26W

Zadania laboratoryjne:

Zadanie 1

Badanie rozpuszczalności soli litu w rozpuszczalnikach o różnej polarności (stałej dielektrycznej).

Celem ćwiczenia jest weryfikacja doświadczalna zależności

Przewodność jonowa elektrolitu jako funkcja stężenia (koncentracji nośników ładunku, ruchliwości nośników ładunku i temperatury)

$\delta_e = f(n, \mu, T)$ (1)

Stężenie(koncentracja nośników ładunku, jako funkcja stałej dielektrycznej rozpuszczalnika)

$n = f(\varepsilon)$ (2)

w aspekcie wpływu rodzaju rozpuszczalnika i jego właściwości fizykochemicznych na ilość (stężenie) nośników ładunku w elektrolicie a tym samym wartość przewodnictwa jonowego elektrolitu.

Niezbędne odczynniki:

Sole litu:

LiCl, LiBr, LiI (można je zastąpić solami sodowymi)

Rozpuszczalniki:

Woda, metanol (etanol), heksan.

Przyrządy:

Zlewki, bagietki do mieszania, waga laboratoryjna, w wersji rozszerzonej konduktometr do pomiarów przewodności jonowej. Jeśli jest dostępny to termostat do badania wpływu temperatury.

Wykonanie:

Odważamy jednakowe ilości poszczególnych soli (tak aby sporządzić roztwory 1 molowe), które następnie staramy się rozpuszczać w poszczególnych rozpuszczalnikach; kolejno w wodzie, metanolu (etanolu), heksanie. Odnotowujemy spostrzeżenie co do szybkości rozpuszczania się soli w tym samym rozpuszczalniku i tej samej soli w różnych rozpuszczalnikach. Jeśli posiadamy takie możliwości to dokonujemy pomiaru przewodności jonowej sporządzonych roztworów. Jeśli posiadamy termostat to podgrzewamy roztwory do temperatury 50^o C i dokonujemy tej samej serii pomiarów.

W oparciu o dokonane obserwacje, kalendarz lub tablice chemiczne zawierające dane dotyczące rozpuszczalności soli w wodzie, stałej dielektrycznej rozpuszczalników przeprowadzamy dyskusję nad wpływem rodzaju rozpuszczalnika, temperatury przygotowania roztworu jak i budowy soli (rodzaj anionu) na rozpuszczalność soli w rozpuszczalnikach a tam gdzie wykonano pomiary przewodnictwa również na wartość przewodności jonowej roztworu.

Uczniowie nie powinni mieć problemu ze stwierdzeniem jak polarność (stała dielektryczna rozpuszczalnika) wpływa na jego zdolność do rozpuszczania soli (im większa stała dielektryczna tym lepiej sól się rozpuszcza). Nie powinien też nastręczać kłopotów omówienie wpływu temperatury na rozpuszczalność soli (im wyższa temperatury ty lepsza rozpuszczalność), oraz powiązaniu tych właściwości z przewodnością jonową roztworu. Dla uczniów o poszerzonych zainteresowaniach chemią lub (i) fizyką pozostawiamy omówienie problemu wpływu struktury soli (rodzaju anionu) na rozpuszczalność i przewodność jonową sporządzonych roztworów. Mogą oni w oparciu o dane z Tablic Chemicznych i dostępnych źródeł internetowych lub Kalendarza Chemicznego przedyskutować wpływ siły wiązania lit-anion na rozpuszczalność soli i przewodnictwo jonowe roztworu i uzasadnić dlaczego najkorzystniejsze jest stosowanie LiI.

<u>Zadanie 2</u>

Badanie wpływu lepkości (gęstości rozpuszczalnika) na szybkość (ruchliwość) jonów.

Celem ćwiczenia jest weryfikacja doświadczalna zależności

Przewodność jonowa elektrolitu jako funkcja stężenia (koncentracji nośników ładunku, ruchliwości nośników ładunku i temperatury)

$\delta_e = f(n, \mu, T)$ (1)

Ruchliwość nośników ładunku jako funkcja lepkości rozpuszczalnika

$\mu = f(\eta)$ (2)

<u>Materiały:</u>

Rozpuszczalniki: woda, gliceryna

Kulki styropianowe jako materiał symulujący cząsteczkę jonu.

Stoper lub inne urządzenie mierzące czas ruchu kuli w rozpuszczalniku. Wysoka menzurka

<u>Wykonanie:</u>

Do dwóch menzurek o wysokości co najmniej 30 cm nalewamy wody i gliceryny. Na znak nauczyciela uczniowie w tym samym momencie wpuszczają kulki styropianowe a dwaj inni uczniowie mierzą czas ruchu kulek do momentu opadnięcia na dno.

Wnioski

Doświadczenie powinno wykazać, że czas ruchu kulki w owdzie jest znacznie krótszy niż w glicerynie. Korzystając z tablic chemicznych uczniowie znajdują wartości lepkości obu cieczy i przeprowadzają dyskusje równania (2) i na jej podstawie równania (1). Im mniejsza lepkość cieczy tym szybszy ruch kulki (jonu) a więc większa ruchliwość i tym samym większa przewodność jonowa.

Zadanie 3

Badanie reaktywności litu (sodu) w różnych rozpuszczalnikach (woda, metanol, eter di etylowy).

Materiały

Folia litowa lub sodowa, woda, metanol, eter di etylowy, zlewki, szczypce

Uwaga!!!

Podczas wykonania ćwiczenia uczniowie obowiązkowo zakładają okulary ochronne.

Wykonanie

Niewielki ilości folii litu (sodu) wrzucamy do zlewek zawierających wodę , etanol, i eter di etylowy. Obserwujemy szybkość i intensywność reakcji metalu w każdej ze zlewek.

Wnioski:

Lit (sód) najszybciej reagują z woda następnie z metanolem i eterem di etylowym. Można prosić uczniów o zapisania reakcji chemiczny metali z wodą i metanolem.
Doświadczenie tłumaczy dlaczego roztwory wodne i te roztwory organiczne które zwierają grupy reagujące z metalami alkalicznymi nie mogą być stosowane w technologii baterii litowych. Tłumaczą też dlaczego stosuje się rozpuszczalniki zawierające grupy eterowe mniej aktywne w reakcjach z metalami alkalicznymi.

SŁOWNIK

Podstawy fizyczne – podstawowe równania stosowane w wykładzie.

Moc prądu elektrycznego pobierana z baterii

P = U*I

Napięcie pracy baterii

U = SEM(OCV) – IR_c

Opór jonowy elektrolitu

$R_e = 1/\delta_e * l/S$

Przewodność jonowa elektrolitu jako funkcja stężenia (koncentracji nośnikówładunku, ruchliwości nośników ładunku i temperatury)

$$\delta_e = f(n, \mu, T)$$

Stężenie(koncentracja nośników ładunku, jako funkcja stałej dielektrycznej rozpuszczalnika)

$$n= f (\varepsilon)$$

Ruchliwość nośników ładunku jako funkcja lepkości rozpuszczalnika

$$\mu= f(\eta)$$

Znaczenie poszczególnych symboli:

P- moc prądu elektrycznego uzyskiwana z baterii
U- napięcie pracy baterii
I – prąd czerpany z baterii przy danym napięciu pracy
SEM – siła elektromotoryczna ogniwa wchodzącego w skład baterii
OCV – napięcie pracy ogniwa (baterii) przy czerpaniu zerowego prądu elektrycznego
R_c – opór całkowity ogniwa
R_e – opór jonowy elektrolitu
δ_e - przewodność jonowa elektrolitu
l- grubość warstwy elektrolitu pomiędzy elektrodami
S- powierzchnia czynna elektrod
n- stężenie (koncentracja nośników ładunku)
T- temperatura pracy baterii
μ - ruchliwość jonów
ε - stała dielektryczna rozpuszczalnika
η – lepkość rozpuszczalnika

RZECZ O PRZEŁAMYWANIU BARIER

dr inż. Piotr Winiarek
Wydział Chemiczny Politechniki Warszawskiej

1. W jaki sposób działa katalizator? Odpowiedz omawiając poniższy wykres:

2. Obecnie głównym źródłem związków organicznych jest ropa naftowa. Zasoby tego surowca nie są jednak nieograniczone i w przyszłości mogą zostać wyczerpane. Przewiduje się, że w przyszłości głównym źródłem związków organicznych może być węgiel. Węgiel poddaje się reakcji z parą wodną (zgazowanie), w której otrzymuje się mieszaninę wodoru i tlenku węgla(II). Przepuszczając tę mieszaninę przez różne katalizatory można otrzymać mieszaninę o składzie zbliżonym do ropy naftowej i przetwarzać ją w podobny sposób, jak obecnie przetwarza się ropę. Odszukaj w encyklopedii i Internecie informacje na temat syntezy Fischera-Tropscha. Zwróć uwagę na katalizatory, jakie stosuje się w tej syntezie.

3. Jakie są składniki katalizatora heterogenicznego i jakie są ich funkcje?

4. W obecności katalizatorów Zieglera-Natty można otrzymać 1 t polietylenu stosując katalizator zawierający 1 g tytanu. Wiedząc, że zadaniem katalizatora jest dołączanie do narastającego łańcucha polimeru kolejnych jednostek C2H4 oblicz, ile razy zadziałał w tej reakcji każdy atom tytanu.

5. Jakie zagrożenia dla środowisku powoduje brak katalizatora dopalania spalin w układzie wydechowym silnika samochodowego?

6. Przyrządzono roztwór wodny manganianu(VII) potasu o intensywnym, fioletowym kolorze. Umieszczono go w rozdzielaczu i dodano taką samą objętość benzenu. Otrzymano 2 warstwy: górna, benzenowa była bezbarwna. Do rozdzielacza dodano pewną ilość chlorku benzylotrietyloamoniowego (TEBA-Cl) i całość starannie wymieszano. Po rozdzieleniu warstw okazało się, że tym razem warstwa górna ma kolor fioletowy a dolna jest bezbarwna. Wyjaśnij zaobserwowane zjawisko.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Zasada działania katalizatora polega na wytworzeniu kompleksu aktywnego o energii niższej niż w przypadku reakcji prowadzonej bez obecności katalizatora. Cząsteczki reagentów wiążą się z centrami aktywnymi katalizatora za pomocą wiązań chemicznych, co osłabia wiązania w obrębie reagującej cząsteczki. Efekt energetyczny reakcji prowadzonych wobec katalizatora i bez jego obecności jest taki sam. Zmienia się natomiast energia aktywacji reakcji – w przypadku reakcji katalitycznej jest ona znacznie niższa. Ponieważ energia aktywacji jest bezpośrednio związana z szybkością reakcji (zależność wykładnicza!) więc obniżenie EA spowoduje znaczne zwiększenie szybkości reakcji.

- Synteza Fischera-Tropscha polega na uwodornieniu tlenku węgla(II) gazowym wodorem wobec różnych katalizatorów. W zależności od zastosowanego katalizatora w wyniku reakcji otrzymuje się różne produkty. Początkowo reakcję prowadzono w obecności żelaza modyfikowanego jonami potasu i otrzymywano skomplikowaną mieszaninę zawierająca zarówno węglowodory, jak i związki zawierające atomy tlenu, posiadające łańcuchy węglowe o długości od 1 do ponad 100 atomów węgla. Katalizatory kobaltowe pozwalały uzyskiwać mieszaninę węglowodorów, która łatwo mogła być przetwarzana na paliwa. Duże przemysłowe instalacje do syntezy Fischera-Tropscha pracowały w Niemczech w czasie II Wojny Światowej i pracują do dziś w Republice Południowej Afryki (Sasol). W innych rejonach świata otrzymywanie paliw z węgla jest ekonomicznie nieuzasadnione. Warto wiedzieć, że mieszaninę CO i H2 można selektywnie przeprowadzić w metanol w obecności katalizatorów miedziowo-cynkowych lub w metan wobec niklu. Patrz np.:

http://en.wikipedia.org/wiki/Fischer%E2%80%93Tropsch_process

- Składniki katalizatora heterogenicznego: czynnik aktywny, nośnik i promotor. Pierwszy składnik odpowiedzialny jest za aktywność katalizatora. Podstawowym zadaniem nośnika jest rozwinięcie powierzchni czynnika aktywnego a także nadanie mu odpowiedniej wytrzymałości mechanicznej i cieplnej. Promotor modyfikuje katalizator w ten sposób, aby hamować reakcje niepożądane
- $M(C_2H_4)$ = 2 * 12 g/mol + 4 * 1 g/mol = 28 g/mol;

  w 1 tonie polimeru jest 1000000 g / 28 g/mol = 35714 mol jednostek C_2H_4;
  1 g tytanu to 1/48 mola Ti;

  każdy atom tytanu brał udział w 35714 * 48 = 1714272 aktach powiększania łańcucha polimeru.

- W przypadku braku katalizatora w układzie wydechowym silnika samochodowego do atmosfery wyemitowane zostaną: tlenek węgla(II), niespalone resztki paliwa i oleju smarowniczego (węglowodory) oraz tlenki azotu. CO jest znaną trucizną, atakującą hemoglobinę we krwi, ciężkie węglowodory są prekursorami smogu i zwiększają efekt cieplarniany, natomiast tlenki azotu wrócą do nas w postaci kwaśnego deszczu.

- Za fioletową barwę roztworu odpowiadają jony manganianowe(VII), czyli MnO4-. Po dodaniu do rozdzielacza katalizatora przeniesienia międzyfazowego TEBA-Cl, czwartorzędowy kation amoniowy transportuje aniony manganianowe(VII) do warstwy benzenowej, stąd jej fioletowe zabarwienie.

SŁOWNIK

termodynamika chemiczna - dział chemii fizycznej zajmujący się zmianami stosunków energetycznych w układzie, w którym zachodzi reakcja chemiczna.

kinetyka chemiczna – dział chemii fizycznej zajmujący się szybkością reakcji chemicznych.

katalizator – każde ciało, które dodane do reagentów zmienia szybkość reakcji chemicznej i nie występuje w produktach tej reakcji (Ostwald 1895).

CZY MOŻNA POLUBIĆ CHEMIĘ ORGANICZNĄ?

Michał Fedoryński
Politechnika Warszawska, Wydział Chemiczny

Zadanie 1

Wytrząsanie alkoholu *t*-butylowego (2-metylopropan-2-olu) $(CH_3)_3COH$ z kwasem bromowodorowym jest dogodną metodą syntezy bromku *t*-butylu (2-bromo-2-metylopropanu). Etapem decydującym o szybkości tej reakcji jest powstawanie karbokationu. Trzeciorzędowy karbokation*t*-butylowy jest dobrze stabilizowany, a więc tworzy się łatwo. Można oczekiwać, że prowadzona w analogicznych warunkach reakcja butanolu z kwasem bromowodorowym będzie zachodzić znacznie wolniej lub nie zajdzie w ogóle, bowiem karbokationy pierwszorzędowe są gorzej stabilizowane w porównaniu z trzeciorzędowymi. Tymczasem w reakcji butanolu z kwasem bromowodorowym 1-bromobutan (bromek butylu) powstaje z dobrą wydajnością, aczkolwiek proces ten wymaga ogrzewania i dodatku kwasu siarkowego. Jak to objaśnić?

<u>Odpowiedź:</u>

Reakcja ta biegnie według innego mechanizmu. W reakcjach z alkoholami pierwszorzędowymi protonowanie grupy hydroksylowej powoduje, że staje się ona bardzo dobrą grupą opuszczającą i jest podstawiana przez anion bromkowy w reakcji typu S_N2, a proces z udziałem karbokationu ma minimalne znaczenie.

Zadanie 2

Eter *t*-butylowo metylowy otrzymuje się na skalę przemysłową z 2-metylopropenu i metanolu w reakcji katalizowanej przez kwasy. Można go również otrzymać w reakcji S_N2 alkoholanu z chlorowcoalkanem. Który wariant tej syntezy wybrałbyś: reakcja *t*-butanolanu sodu z bromkiem metyluczy bromku *t*-butylu z metanolanem sodu?

<u>Odpowiedź:</u>

Aniony alkoholanowe są mocnymi zasadami i często reakcji podstawienia towarzyszy β-eliminacja. Niesymetryczne etery należy zatem otrzymywać w reakcji pierwszorzędowego chlorowcoalkanu i wyżej rzędowego alkoholu, a nie odwrotnie

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Zadanie 3

Narysuj wzory rezonansowe:

a) anionu octanowego

b) anionu cyklopentadienylowego

c) butenonu

d) kationu

Zadanie 4

Estry kwasów karboksylowych otrzymuje się najczęściej w katalizowanej kwasem (np. kwas siarkowy) reakcji kwasu karboksylowego z alkoholem pierwszo- lub drugorzędowym, np.:

Jak zrealizowałbyś tę przemianę nie dysponując żadnym kwasowym katalizatorem?

Odpowiedź:

Estry można otrzymać w reakcji soli kwasu karboksylowego (wytworzonej działaniem słabej zasady, np. wodnego roztworu NaOH, na kwas) z chlorowcoalkanem – jest to reakcja podstawienia S_N2.

Zadanie 5

W 1845 r. Adolph Wilhelm Hermann Kolbe (1818-1884), chemik niemiecki, uczeń Wöhlera, nazywany ojcem syntezy organicznej, dokonał pełnej syntezy kwasu octowego z pierwiastków, tym samym potwierdził tezę Wöhlera, iż związki organiczne mogą powstawać bez udziału organizmów żywych. Znajdź w Internecie dane na temat tej syntezy, nie przejmuj się jeżeli nie wszystkie procesy są zrozumiałe, przyjdzie na to czas.

Zadanie 6

Jakie skojarzenie budzi związek o nazwie: 6-n-butylocykloheptadien-1,4? Jaką nadałbyś mu nazwę zwyczajową?

Odpowiedź:

Nie wiemy jaką nazwę wymyśliłeś, ale SubramanianRanganathan z Indian Institute of Technology w Kanpurze nazwał go “spermane”. Jest to składnik olejku wydzielonego z algi *dictyopteris* znany także jako *dictyopterine C'*

Zadanie 7

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Znając szereg elektroujemności atomów można domniemywać, że reakcja S_N2 karboanionów z chlorowcoalkanami zajdzie najszybciej w przypadku fluorków alkilowych w porównaniu z chlorkami, bromkami czy jodkami. Cząstkowy ładunek dodatni jest bowiem największy na atomie węgla połączonym z atomem fluoru w cząsteczce fluoroalkanu. W rzeczywistości jest odwrotnie, przy czym fluorki alkilowe są w ogóle nieaktywne w reakcji S_N2. Jak to objaśnić?

Odpowiedź:

Zapomnieliśmy o trwałości wiązania. Nakładanie się chmur elektronowych tworzących wiązanie chemiczne jest najefektywniejsze w przypadku atomów o zbliżonych rozmiarach. Tak więc wiązanie węgiel-fluor (oba atomy znajdują się w tym samym okresie tablicy Mendelejewa) jest najmocniejsze (ma największą energię) i nie ulega rozerwaniu. Występują tu więc dwa przeciwstawne efekty – efekt indukcyjny i energia wiązania.

SŁOWNIK

węglowodory – składają się tylko z atomów węgla i wodoru. Wyróżniamy związki węgla i wodoru połączonych w różny sposób wiązaniami pojedynczymi (tzw. węglowodory nasycone, alkany, np. metan, propan); związki węgla i wodoru zawierające jedno lub więcej wiązanie podwójne węgiel-węgiel (alkeny, np. etylen), związki zawierające wiązanie potrójne węgiel-węgiel (alkiny, np. acetylen), węglowodory aromatyczne (nazwa nie ma nic wspólnego z zapachem!), np. benzen – o nich nie będziemy mówić.

alkohole – związki zawierające grupę OH (grupę hydroksylową), połączoną z podstawnikiem węglowodorowym, np. metanol, CH_3OH.

aldehydy – związki zawierające grupę C=O (karbonylową), połączoną z atomem wodoru i podstawnikiem węglowodorowym, np. etanal (aldehyd octowy)

ketony – związki zawierające grupę karbonylową, połączoną z dwoma podstawnikami węglowodorowymi, np. propanon (aceton), $CH_3C(O)CH_3$

kwasy karboksylowe i ich pochodne (estry, chlorki kwasowe, bezwodniki kwasowe itp.)

- etery
- siarczki
- aminy
- chlorowcopochodne

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

WIESZ CO JESZ – CHEMIA SPOŻYWCZA

dr inż. Aneta Pobudkowska-Mirecka

1. 20g glukozy dodano do 200g wody otrzymując roztwór o objętości 210cm^3. Oblicz stężenie molowe glukozy w tak otrzymanym roztworze.

Rozwiązanie:

Dane:

m_s=20g

m_{rozp}=200g=0,2kg

V_r=210cm^3=0,21dm^3

Szukane:

C_m = ? (stężenie molowe)

2. 100 ml mleka zawiera 4,7 g laktozy ($C_{12}H_{22}O_{11}$). Ile moli laktozy zawiera karton mleka o pojemności 1,5 l?

Rozwiązanie:

Dane:

V_r = 100ml

m_s = 4,7 g

M_s = 342 g/mol

ms(1,5l) = 4,7·15 = 70,5 g

n_s = 70,5/342 = 0,206

3. Proszę zbadać przy pomocy jodyny jakie produkty używane w kuchni zawierają skrobię , a jakie nie.

Przed doświadczeniem należy próbkę produktu zagotować z niewielką ilością wody.

4. Proszę zaproponować i wykonać doświadczenie mające na celu zbadanie procesu wysalania białka.

Do probówki nalej ok. 3cm^3 roztworu białka, następnie dodaj taką samą objętość nasyconego roztworu soli kuchennej. Wymieszaj. Co obserwujesz? Dodaj ok. 10cm^3 wody destylowanej i wstrząsaj. Co obserwujesz?

Po dodaniu roztworu soli kuchennej (NaCl) do roztworu białka (roztwór koloidalny) wytrąca się biały osad. Proces ten nazywa się wysalaniem białka. Jest to proces odwracalny (nie narusza struktury przestrzennej cząsteczki białka), dlatego po dodaniu wody osad się rozpuszcza.

roztwór koloidalny białka (zol) zawiesina białka (żel)

Proces wytrącania się osadu w roztworze koloidalnym nosi nazwę koagulacji (cząsteczki białka łączą się w większe agregaty). Proces odwrotny to peptyzacja.

5. Zbuduj model cząsteczki bromochlorofluorometanu, używając do oznaczania atomów poszczególnych pierwiastków kulek o różnych barwach lub średnicach. Porównaj swój model z modelami zbudowanymi przez innych. Odpowiedz na pytania: czy wszystkie modele są identyczne? Jeśli nie to podzielcie je na grupy złożone z jednakowych modeli. Ile jest takich grup. Czym różnią się modele należące do tych grup? Jaką cechę należy im przypisać?

W tym ćwiczeniu uczeń powinien wykazać się znajomością pojęcia chiralności.

SŁOWNIK

Chiralność – cecha niektórych cząsteczek chemicznych polegająca na tym, że ich lustrzane odbicia nie są z nimi identyczne. Para takich cząsteczek to izomery optyczne - enancjomery.

Węglowodany – cukry, związki składające się z węgla, tlenu i wodoru, stanowiące podstawowe źródło energii, koniecznej dla podtrzymania procesów życiowych.

Tłuszcze – lipidy, estry glicerolu (gliceryny) i różnych kwasów tłuszczowych, mające wysoką wartość kaloryczną. Są materiałem zapasowym organizmów żywych.

Białka – peptydy, związki składające się z węgla, tlenu, azotu i wodoru. Biopolimery utworzone z aminokwasów. Stanowią o budowie i wszelkich funkcjach organizmów żywych.

HISTORIA MYCIA, PRANIA I UPIĘKSZANIA

Dr inż. Joanna Główczyk

1. Przedstaw budowę chemiczną tłuszczów naturalnych i przebieg reakcji zmydlania.

Tłuszcze to estry glicerolu i kwasów tłuszczowych. W środowisku alkalicznym zachodzi hydroliza estrów, powstaje glicerol i sole kwasów tłuszczowych (mydła).

2. Jaki jest odczyn wodnego roztworu mydła? Odpowiedź uzasadnij.

Mydła to sole słabych kwasów i mocnej zasady. W środowisku wodnym te sole ulegają reakcji hydrolizy, stąd roztwór ma odczyn alkaliczny

3. Co oznaczają pojęcia hydrofobowy, lipofilowy, hydrofilowy?

Pojęcia hydrofobowy i lipofilowy najczęściej oznaczają to samo „nielubiący wody" i „lubiący tłuszcze", związek niepolarny. Hydrofilowy – „lubiący wodę", związek polarny.

4. Jaką budowę muszą mieć związki powierzchniowo czynne?

Związki powierzchniowo czynne muszą zawierać grupy hydrofilowe i hydrofobowe. Ważne, żeby grupa hydrofobowa nie miała więcej niż 18 atomów węgla. W przeciwnym razie przewaga właściwości hydrofobowych uniemożliwi rozpuszczanie związku w wodzie.

5. Jaka jest różnica między pigmentem i barwnikiem? Co jest częściej stosowane w kosmetykach i dlaczego?

Barwniki rozpuszczają się w wodzie czy w olejach, a pigmenty są nierozpuszczalne. Z tego wynika, że pigmenty, stosowane w postaci zawiesiny, nie oddziałują bezpośrednio na skórę, są łatwe do usunięcia i nie zostawiają śladów.

SŁOWNIK

mydła - sole kwasów karboksylowych zawierających od dwunastu do osiemnastu atomów węgla w cząsteczce. Kationami w cząsteczkach mydeł mogą być sód lub potas. Te związki są rozpuszczalne w wodzie i stanowią podstawę popularnego produktu użytkowego. Mydłami nazywamy też nierozpuszczalne w wodzie sole wapniowe, magnezowe, cynkowe, glinowe.

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Mazowiecki Kurator Oświaty Al. Jerozolimskie 32 00-024 Warszawa

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

tłuszcze - naturalne tłuszcze są mieszaniną estrów glicerolu i kwasów tłuszczowych o różnej długości łańcuchów węglowodorowych. Łańcuchy tych kwasów są zawsze proste a liczba węgli – parzysta. Wynika to z mechanizmu biosyntezy kwasów tłuszczowych w komórkach żywych organizmów.

kosmetyk – jest nim każda substancja przeznaczona do zewnętrznego kontaktu z ciałem człowieka: skórą, włosami, wargami, paznokciami, zewnętrznymi narządami płciowymi, zębami i błonami śluzowymi jamy ustnej, którego wyłącznym lub głównym celem jest utrzymanie ich w czystości, pielęgnowanie, ochrona lub upiększanie.

związki powierzchniowo czynne – związki amfifilowe, zawierają w cząsteczce fragmenty hydrofilowe (polarne) i hydrofobowe (niepolarne).

Projekt współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki