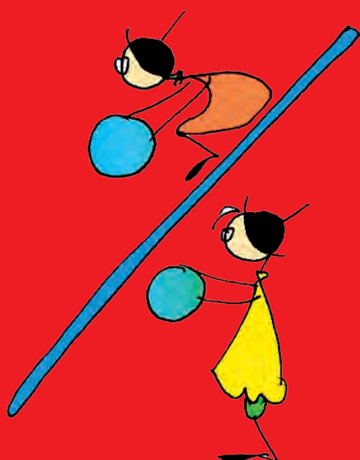
CEO
CENTRUM EDUKACJI OBYWATELSKIEJ

EKSPERYMENTOWANIE I WZAJEMNE NAUCZANIE

MATEMATYKA



WARSZAWA 2014

Publikacja wydana w ramach Projektu Akademia uczniowska

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

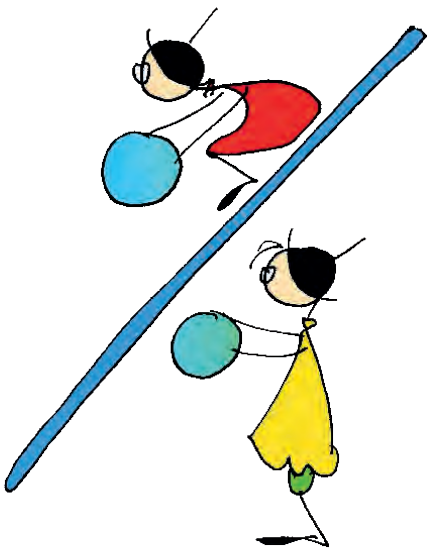
akademia uczniowska

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

CENTRUM EDUKACJI OBYWATELSKIEJ

EKSPERYMENTOWANIE I WZAJEMNE NAUCZANIE

MATEMATYKA



WARSZAWA 2014

Publikacja wydana w ramach Projektu Akademia uczniowska
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

akademia uczniowska

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Autorzy:

Nauczycielki i nauczyciele uczestniczący w projekcie Akademia uczniowska

Eksperci merytoryczni CEO: Włodzimierz Gapski, Jerzy Kielech,
dr Marek Piotrowski, Danuta Sterna,
dr Jacek Strzemieczny, Barbara Uniwersał

Redakcja: Marta Dobrzyńska, Ewelina Kieller, Ewa Sokołowska-Fabisiewicz,
Katarzyna Wąsowska-Garcia

Korekta merytoryczna: Adam Makowski

Rysunki: Danuta Sterna

Redakcja i korekta językowa: Joanna Fundowicz

Wydawca:
Fundacja Centrum Edukacji Obywatelskiej
Centrum Edukacji Obywatelskiej
ul. Noakowskiego 10/1
00-666 Warszawa
www.ceo.org.pl

Wydanie pierwsze
ISBN 978-83-64602-06-1

Publikacja powstała dzięki zaangażowaniu i pasji zespołu Akademii uczniowskiej, który wspierał nauczycieli uczestniczących w projekcie:
Marta Dobrzyńska, Agnieszka Gałązka, Jolanta Grzebalska-Feliksiak, Agnieszka Guzicka, Ewelina Kieller, Malwina Kostańska, Maciej Leszczyński, Agata Ludwikowska, Magdalena Mazur, Justyna Rot-Mech, Anna Sokolnicka, Ewa Sokołowska-Fabisiewicz, Katarzyna Wąsowska-Garcia.

Projekt Akademia uczniowska realizowany jest przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej we współpracy z partnerami: Międzynarodowym Instytutem Biologii Molekularnej i Komórkowej oraz Polsko-Amerykańską Fundacją Wolności.

Jak dobrze uczyć przedmiotów matematyczno-przyrodniczych w gimnazjum? W jaki sposób wspierać uczniów w samodzielnym stawianiu pytań i poszukiwaniu na nie odpowiedzi? Jak zachęcać gimnazjalistów do tego, by osobiście angażowali się w proces poznania i zrozumienia świata oraz wzięli odpowiedzialność za swoje uczenie się?

Wierzę, że szkoła może te cele osiągnąć, wspomagając uczniów w dążeniu do naukowej samodzielności, rozwijając ich kluczowe kompetencje, zachęcając do aktywności opartej o ich wewnętrzne zaangażowanie i naturalną ciekawość świata.

Sprawmy, by uczniowie sami zadawali pytania, które uznają za ważne i próbowali na nie odpowiadać. Dzięki temu będą czynnie uczestniczyć w procesie edukacji, a uczenie się stanie się bardziej efektywne. Jeśli do tego w szkołach stworzymy atmosferę wspólnej pracy, a nie tylko uczenia się obok siebie, dodamy gimnazjalistom odwagi, by stali się nawzajem swoimi nauczycielami, to będziemy mieli szkołę marzeń.

Szkoła skoncentrowana na uczeniu się, wykorzystując wiedzę o tym, jak ludzie zdobywają wiedzę, uwzględnia zainteresowania ucznia, jego motywację i społeczny sposób uczenia się. W projekcie Akademia uczniowska gimnazjaliści z pomocą nauczycieli stawiali pytania badawcze, wykorzystując schemat naukowy, szukali odpowiedzi na nie i pracując zespołowo, dzielili się swoją wiedzą i umiejętnościami.

dr Jacek Strzemieczny

Centrum Edukacji Obywatelskiej

Cel i zawartość publikacji

Z przyjemnością oddajemy w Państwa ręce wyjątkowy zbiór scenariuszy zajęć. Wyjątkowy, bo z założenia niedoskonały. Zgromadzone w publikacji przykłady doświadczeń są autentycznymi scenariuszami zajęć przeprowadzonych w czasie Szkolnych Kół Naukowych lub podczas zajęć lekcyjnych przez nauczycieli praktyków w ramach projektu Akademia uczniowska. Wiele z prezentowanych propozycji lekcji zostało opracowanych pod okiem nauczycieli przez uczniów, którzy są w procesie uczenia się. Gimnazjaliści ci przygotowywali zajęcia dla kolegów i koleżanek w ramach wzajemnego nauczania. Nie dziwmy się więc, że czasami treść hipotezy lub pytanie badawcze mogą wydawać się zbyt proste.

Wierzymy, że dzięki temu publikacja jest szczególnie cenna, gdyż przykłady dobrych praktyk są oparte na doświadczeniach nauczycieli i uczniów, a wykorzystane mogą być w każdej szkole. Przedstawiamy Państwu propozycje lekcji, które, jak się okazało, pobudziły i utrzymały ciekawość oraz zainteresowanie uczniów otaczającym światem. Zainspirowały ich do samodzielnego badania świata zgodnie ze schematem badań naukowych.

Przykłady dobrych praktyk zostały ułożone z uwzględnieniem treści nauczania i celów kształcenia z podstawy programowej. Zawierają uwagi i rekomendacje ekspertów przedmiotowych. Mamy nadzieję, że będą wsparciem w Państwa codziennej pracy.

Zespół Akademii uczniowskiej

O projekcie Akademia uczniowska

Publikacja powstała w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej. Projekt ma na celu znalezienie praktycznej odpowiedzi na pytanie: „jak uczyć młodzież o poznaniu naukowym”. Wzięły w nim udział 322 gimnazja.

W 2008 roku Ministerstwo Edukacji Narodowej wprowadziło tzw. nową Podstawę Programową kształcenia ogólnego, która kładzie szczególny nacisk na nabywanie i rozwijanie kompetencji kluczowych, w tym 8 kompetencji określonych w Zaleceniu Parlamentu Europejskiego i Rady z 18 grudnia 2006 roku (2006/962/EC).

Nowa podstawa wyraźnie podnosi znaczenie przedmiotów przyrodniczych (biologia, chemia, fizyka) oraz matematyki, a także zmienia podejście do ich nauczania.

Projekt Akademia uczniowska koncentruje się na wprowadzeniu do praktyki szkolnej nowych elementów zawartych w podstawie programowej opartych na kompetencjach kluczowych, w tym głównie na: kompetencjach naukowo-technicznych, matematycznych oraz umiejętności uczenia się. Program obejmuje przedmioty: biologia, chemia, fizyka oraz matematyka.

Wstęp

Wszelkie propozycje działań, które powstały w ramach Akademii uczniowskiej zakładają aktywizację uczniów, jak również nauczycieli w trakcie pracy w szkole. Założenie, że osobiste zaangażowanie w zdobywanie wiedzy daje lepsze rezultaty niż przejrzenie kilku stron w książce jest powszechnie akceptowane, często jednak niestosowane w praktyce. Proponowane przez Akademię uczniowską cztery rodzaje działań pozwolą „wciągnąć" uczniów do świata wiedzy, a są to:

- eksperyment prowadzony zgodnie z metodą naukową,
- obserwacja prowadzona zgodnie z metodą naukową,
- zajęcia z pytaniem problemowym,
- gra dydaktyczna.

Dwie pierwsze formy to:

- **EKSPERYMENT** rozumiany jako proces, w trakcie którego badacz wprowadza zaplanowaną zmianę jednego czynnika i bada, jakie ta zmiana przynosi rezultaty, uważając przy tym, by inne czynniki pozostały niezmienne.
- **OBSERWACJA** rozumiana jako zaplanowane gromadzenie faktów, bez wprowadzania jakichkolwiek ingerencji w badane zjawisko. W trakcie obserwacji nie występuje zmienna niezależna, ponieważ – tak, jak już zostało powiedziane – nie ingerujemy w badany proces.

Eksperyment i obserwacja są realizowane zgodnie z metodą naukową. Co to oznacza w praktyce? Przede wszystkim proponujemy, by pierwszym krokiem było <u>wspólne z uczniami</u> postawienie **PYTANIA BADAWCZEGO.** Taki sposób rozpoczęcia eksperymentu pozwala ukierunkować myśli i skoncentrować się na badanym problemie. Ponadto uświadamia uczniom fakt, iż badania naukowe nie są przypadkowym przelewaniem substancji X do substancji Y, lecz są wynikiem zaplanowanego działania. Warto zwrócić uwagę na to, by pytania badawcze nie miały formy zamkniętej i nie sugerowały gotowej odpowiedzi.

Przykład **PYTANIA BADAWCZEGO**: *Jaki wpływ na kiełkowanie rzeżuchy ma woda?*

Następnie należy postawić **HIPOTEZĘ**, czyli prawdopodobną, przewidywaną i wymyśloną przez uczniów odpowiedź na pytanie badawcze na podstawie wcześniejszej wiedzy bądź własnych przypuszczeń. Przed wykonaniem eksperymentu nie ma złych lub dobrych hipotez, każda, nawet najbardziej śmiała jest dopuszczalna. Na dalszym etapie pracy weryfikujemy postawioną hipotezę tak, abyśmy ją mogli odrzucić bądź przyjąć jako prawdziwą. Jeśli żadna z tych dwóch opcji nie jest możliwa, oznacza to ponowne przemyślenie doboru metod badawczych i przeprowadzenie kolejnego eksperymentu.

Przykład **HIPOTEZ:** *Woda powoduje, że rzeżucha zgnije.*

Woda jest niezbędna do kiełkowania nasion rzeżuchy.

Następnym krokiem w świat metody naukowej jest określenie zmiennych: **ZMIENNEJ NIEZALEŻNEJ** (to, co będziemy zmieniać) **ZMIENNEJ ZALEŻNEJ** (to, co będziemy mierzyć) i **ZMIENNYCH KONTROLNYCH** (to, co musimy pozostawić niezmienne). Określenie tych parametrów powinno się odbyć wspólnie z uczniami. Nie od razu wprowadzamy te łatwo mylące się określenia. Początkowo po prostu zastanawiamy się wspólnie z uczniami, jakie czynniki mogą mieć wpływ na badane przez nas zjawisko. W naszym przykładzie uczniowie powinni wskazać, co może mieć wpływ na kiełkowanie rzeżuchy.

Przykład: na kiełkowanie rzeżuchy może mieć wpływ: *woda, światło słoneczne, gęstość zasiewu, obecność gleby, rodzaj gleby, pora roku siewu* itp.

Tym sposobem uczniowie samodzielnie wskazują cały szereg zmiennych niezależnych! Z tej puli należy wybrać do pojedynczego eksperymentu <u>tylko jedną z nich</u>**.** Gdybyśmy wybrali więcej zmiennych i zmieniali je jednocześnie, nie bylibyśmy w stanie określić, która z nich rzeczywiście powoduje zmiany. Następnie czynnik wybrany jako **ZMIENNA NIEZALEŻNA** <u>będzie zmieniany</u> w trakcie eksperymentu. W naszym przykładzie wykonamy po prostu dwa warianty eksperymentu, czyli kiełkowanie rzeżuchy w obecności lub przy braku wody. Wszystkie pozostałe czynniki, które zostały wymienione na początku planowania eksperymentu, jako mające potencjalny wpływ na kiełkowanie muszą <u>pozostać stałe</u>. Te czynniki nazywane są **ZMIENNYMI KONTROLNYMI.** W ten sposób zyskujemy pewność, że wyniki eksperymentu zależą tylko i wyłącznie od parametru określanego przez nas jako **ZMIENNA NIEZALEŻNA.**

Czym zatem jest **ZMIENNA ZALEŻNA?** Jest to parametr mierzony podczas doświadczenia, który zmienia się w zależności od zmian **ZMIENNEJ NIEZALEŻNEJ.** W naszym przykładzie jest to tempo kiełkowania rzeżuchy. Pomiary tego parametru pozwalają nam na weryfikację hipotezy. **ZMIENNA ZALEŻNA** <u>jest również tylko jedna.</u>

W doświadczeniu naukowym pojawiają się również **PRÓBY KONTROLNE**. Bez kontroli nie można jednoznacznie stwierdzić, czy wyniki doświadczenia są wiarygodne. Kontrola pozytywna to dodatkowa próba, którą przeprowadzamy identycznie, jak próbę badawczą, ale z użyciem takiego czynnika (jeśli jest znany), który na pewno wywołuje pożądany efekt. Z kolei kontrola negatywna to dodatkowa próba, ale bez użycia czynnika, o którym wiemy, że wywołuje badane zjawisko. Z założenia, wynikiem tej próby będzie brak zmiany mierzonego parametru. Nie w każdym układzie doświadczalnym da się zaplanować obie próby kontrolne.

Należy pamiętać, że każdy eksperyment, nawet taki, który „nie wyjdzie", jest bardzo wartościowy. Najważniejsze jest, by wspólnie z uczniami przeprowadzić analizę wyników i sformułować wnioski, zastanowić się, co spowodowało, że eksperyment się nie udał. Pamiętajmy, że postęp nauki polega na odkrywaniu nowych zjawisk, ale i na obalaniu starych hipotez. Szukanie nowych wyjaśnień i przyczyn zjawisk jest nieodzownym elementem rozwoju nauki.

Gorącym postulatem wszystkich Autorów dobrych praktyk Akademii uczniowskiej jest wspólne z uczniami przejście przez cały proces planowania eksperymentów. Mimo iż w materiałach znajdą Państwo gotowe propozycje wszystkich parametrów i pytań badawczych, a nawet przykładowe hipotezy, próbujcie ze wszystkich sił angażować swoich uczniów do samodzielnego planowania eksperymentów. Dzięki temu młody człowiek nie tylko utrwala wiedzę merytoryczną, ale również jest w stanie powiązać przyczynę ze skutkiem, wynik z weryfikacją postawionej hipotezy. Zdolność do wyszukiwania zależności przyczynowo-skutkowych ułatwi uczniom poznanie innych treści merytorycznych i logiczną interpretację poznawanych faktów.

Dwie pozostałe formy aktywności proponowane przez Akademię uczniowską to: **ZAJĘCIA Z PYTANIEM PROBLEMOWYM** i **GRA DYDAKTYCZNA**. Pierwsza z nich zakłada dyskusję między uczniami na podstawie dodatkowych pytań lub przykładów dostarczonych przez nauczyciela. Forma ta kształci umiejętność doboru i formułowania argumentów oraz zdolność słuchania osób o odmiennym stanowisku. W wyniku dyskusji cenne byłoby wypracowanie stanowiska, by uczniowie przekonali się, że każda konstruktywna rozmowa powinna zakończyć się rzetelnym podsumowaniem.

GRA DYDAKTYCZNA to bardzo pożyteczna metoda we wzajemnym nauczaniu, uczniowie sami również mogą opracowywać gry dla swoich kolegów. Wykorzystuje czynnik zabawy, wspomaga przyswajanie wiedzy i umiejętności. Grając, uczymy się przez działanie i przeżywanie. Gry dydaktyczne ponadto rozwijają pomysłowość, aktywność, samodzielność, sprzyjają uspołecznieniu, uczą poszanowania norm i radzenia sobie z emocjami. Przez wygraną w grze rozumiemy fakt, że uczeń dociera do celu, osiąga dobry wynik, melduje się na mecie – a więc uczy się. Sukcesem jest osiągnięcie celu, a nie wygrana z innymi, czy zajęcie pierwszego miejsca. Najważniejsza w grze jest dydaktyka. Gra nie powinna rodzić rywalizacji, a tym bardziej nie powinna służyć jako narzędzie oceny – stawianie piątek pierwszym trzem uczniom, którzy zdobędą najwięcej punktów przyniesie odwrotny do zakładanego efekt. W grze dydaktycznej mają wygrywać wszyscy.

Ostatnie, ale nie mniej ważne zalecenie Akademii uczniowskiej to wywołanie w uczniach zadziwienia lub, jak niektórzy to określają, „*efektu WOW/Eureki!*". Element zaskoczenia niespodziewanym wynikiem lub sposobem wyjaśnienia pozytywnie wesprze uczniów w dalszym pogłębianiu tematu i lepszym zapamiętaniu faktów.

dr Agnieszka Chołuj
Międzynarodowy Instytut Biologii Molekularnej i Komórkowej

Spis tematów

[1] Scenariusze dobrych praktyk, które odnoszą się do kilku punktów podstawy programowej, znajdują się pod podanym numerem porządkowym, w pierwszym punkcie PP, w którym się pojawiają. W pozostałych punktach znajdują się tylko odsyłacze w postaci tematu lekcji z numerem porządkowym.

I. Liczby wymierne dodatnie

1. Temat lekcji: Czy kwadrat powstały na bazie kwadratu magicznego Lo-shu przez dodanie lub odjęcie pewnej liczby różnej od zera od umieszczonych w nim liczb będzie magiczny?

Na podstawie pracy Moniki Kuzi oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: kwadrat magiczny.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora).

Rekomendacja ekspertki CEO:
Zapoznanie uczniów z kwadratami magicznymi i zachęcenie do poszukiwania własnych kwadratów.

Źródło:
Magiczna matematyka, W. Janista, B. Kukier, w: Matematyka w Szkole nr 44 III–IV 2008, wyd. GWO.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy kwadrat powstały na bazie kwadratu magicznego Lo-shu przez dodanie lub odjęcie pewnej liczby różnej od zera od umieszczonych w nim liczb będzie magiczny?

Problemy badawcze:
Czy kwadrat powstały na bazie kwadratu magicznego Lo-shu przez dodanie lub odjęcie pewnej liczby różnej od zera od umieszczonych w nim liczb będzie magiczny?

W jaki sposób zmieniła się suma magiczna kwadratu w porównaniu z sumą magiczną kwadratu Lo-shu?

Czy kwadrat powstały na bazie kwadratu magicznego Lo-shu przez pomnożenie lub podzielenie umieszczonych w nim liczb przez daną liczbę różną od zera będzie magiczny? W jaki sposób zmieniła się jego suma magiczna?

OPIS GRY

Zajęcia prowadzone są w grupach. Każda grupa otrzymuje krótką informację na temat kwadratu magicznego Lo-shu[2] i takie samo zadanie do wykonania.
1. Do liczb w kwadracie magicznym Lo-shu dodaj 13.
2. Od liczb w kwadracie magicznym Lo-shu odejmij 5.
3. Liczby w kwadracie magicznym Lo-shu pomnóż przez 4.
4. Liczby w kwadracie magicznym Lo-shu podziel przez 2.

W każdym przypadku uczniowie mają uzupełnić puste pola kwadratów i sprawdzić, czy powstałe w ten sposób kwadraty są magiczne. Jeśli tak, muszą obliczyć ich sumę magiczną i odpowiedzieć na pytanie „W jaki sposób zmieniła się suma magiczna kwadratów w porównaniu z sumą magiczną kwadratu Lo-shu?”.

Kwadrat magiczny Lo-shu

4	9	2
3	5	7
8	1	6

[2] Historia kwadratów magicznych liczy sobie już prawie 5000 lat. Stworzenie tzw. idealnego kwadratu składającego się z dziewięciu pól z liczbami od 1 do 9 przypisuje się chińskiemu filozofowi i budowniczemu Lo-shu. Suma magiczna tego kwadratu wynosi 15, a stopień, czyli liczba pól wzdłuż jednego boku, jest równy 3. Kwadrat Lo-shu jest jedynym kwadratem magicznym trzeciego stopnia. Kwadratów magicznych czwartego stopnia jest 880, natomiast piątego stopnia 275 305 224.

2. Temat lekcji: Ile szczebli będzie miała drabina sięgająca do Księżyca?

Na podstawie pracy Marioli Puzoń oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: odległość z Ziemi do Księżyca, zamiana jednostek długości i czasu.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.);
   dokładnie: zamiana jednostek długości i czasu;
2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie). Uczeń:
   3) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne.

Rekomendacja eksperta CEO:
Cele matematyczne osiągane są „jakby przy okazji” podjętej przez uczniów aktywności. Pomysł ma widoki na ciekawe kontynuacje i modyfikacje.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Ile szczebli będzie miała drabina sięgająca z Ziemi do Księżyca?

Przykładowe hipotezy zaproponowane przez uczniów:
250 000, 36 000 000 szczebli.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Liczbę szczebli drabiny, czas przejścia po drabinie.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Odległości z Ziemi do Księżyca.

Instrukcja do doświadczenia:
Pomoce: drabina, miara do mierzenia odległości między szczeblami, karty do obliczeń, encyklopedia (książka) do wyszukania odległości między planetami.

Uczniowie mierzą odległość między szczeblami przyniesionej drabiny i zgodnie z zamianą jednostek obliczają ich liczbę, a następnie czas przejścia po tej drabinie. Zakładamy, że drabina stoi w pionie.

Hipotezę można zweryfikować, wykonując obliczenia sposobem pisemnym.

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Można zmienić odległość między szczeblami (inna drabina), „pójść" na inną planetę.

Dodatkowe komentarze dla nauczycieli:
Można każdej grupie dać inną drabinę.
Już samo przyniesienie drabiny wzbudza zainteresowanie uczniów.

3. Temat lekcji: Rozwinięcie dziesiętne bez dzielenia

Na podstawie pracy Karoliny Worobiew oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertki CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: ułamek nieskracalny, rozwinięcie dziesiętne ułamka zwykłego, dzielnik liczby, liczba pierwsza.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   3) zamienia ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe), (…).

Rekomendacja ekspertki CEO:
Doświadczenie, w którym uczniowie sami poszukują metody. Ważne przy uczeniu się rozwinięć dziesiętnych ułamków zwykłych.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Jak rozpoznać bez wykonywania dzielenia, czy ułamek zwykły ma rozwinięcie dziesiętne skończone czy nieskończone okresowe?

Przykładowa hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Ułamki o rozwinięciu dziesiętnym skończonym mają mianowniki dzielące się przez 2 lub przez 5.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Ułamki zwykłe o różnych licznikach i mianownikach.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Dzielniki mianowników tych ułamków.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Ułamków nieskracalnych.

Instrukcja do doświadczenia:
Zadaniem uczniów była odpowiedź na pytanie „ Jak rozpoznać bez wykonywania dzielenia, czy ułamek zwykły ma rozwinięcie dziesiętne skończone czy nieskończone okresowe?”.

Uczniowie zgodnie z instrukcją znajdowali rozwinięcie dziesiętne przygotowanych przez nauczyciela ułamków znaną im metodą, czyli przez dzielenie licznika przez mianownik. Następnie szukali dzielników mianowników podanych ułamków i wypisywali te spośród nich, które były liczbami pierwszymi. Po uzupełnieniu odpowiedniej tabeli, zauważyli zależność między tymi dzielnikami a rozwinięciem dziesiętnym ułamka. Do karty pracy przygotowałam również zestaw pojęć podstawowych oraz zestawy ułamków.

Instrukcja dla uczniów:
1. Otrzymaliście zestaw ułamków, na podstawie ich rozwinięć dziesiętnych oraz prowadzonych działań musicie sprawdzić swoją hipotezę.
2. Wyznaczcie osobę, która zostanie liderem grupy – to ona będzie koordynowała pracę w Waszej drużynie.
3. Poszukajcie rozwinięć dziesiętnych wskazanych ułamków nieskracalnych (zapiszcie swoje obliczenia). Obliczeń dokonują lider oraz osoby B i C. Pozostali członkowie grupy czuwają nad ich poprawnością. Lider wpisuje wyniki w tabelę.

4. Podzielcie je na grupy ze względu na rodzaj rozwinięcia (skończone lub nieskończone okresowe).
5. Osoby D, E, F wypisują wszystkie dzielniki mianowników danych ułamków będące liczbami pierwszymi.
6. Zastanówcie się, czy istnieje związek między rodzajem rozwinięcia dziesiętnego ułamka a znalezionymi dzielnikami jego mianownika.
7. Wykonajcie odpowiednie obliczenia i obserwacje, a następnie ustalcie odpowiedź na zadane pytanie (możecie ją poprzeć przykładem ułamka innym niż podany).

Propozycja modyfikacji gry:
Modyfikacja eksperymentu mogłaby polegać na badaniu także ułamków skracalnych oraz wpływu liczby dzielników mianownika ułamka na liczbę cyfr w jego rozwinięciu dziesiętnym.

Wybrane załączniki:
Tabela z ułamkami

Ułamki o rozwinięciu dziesiętnym skończonym			**Ułamki o rozwinięciu dziesiętnym nieskończonym okresowym**		
ułamek zwykły	rozwinięcie dziesiętne	dzielniki mianownika	ułamek zwykły	rozwinięcie dziesiętne	dzielniki mianownika
$\frac{3}{16}$			$\frac{30}{77}$		
$\frac{7}{50}$			$\frac{11}{30}$		
$\frac{8}{625}$			$\frac{1}{9}$		

Podstawowe pojęcia
1. *Dzielnik liczby naturalnej* – dzielnikiem liczby b nazywamy taką liczbę a, która dzieli bez reszty liczbę b.
   Na przykład dzielnikami liczby 12 są: 1, 2, 3, 4, 6, 12, bo każda z liczb dzieli 12 bez reszty.
   Zapisujemy wówczas D12 = {1, 2, 3, 4, 6, 12}
2. *Ułamek nieskracalny* – to ułamek, którego licznik i mianownik nie mają wspólnego dzielnika różnego od jeden.
3. *Rozwinięcie dziesiętne ułamka zwykłego* – to przedstawienie tego ułamka w postaci ułamka dziesiętnego.
4. *Liczby pierwsze* – to liczby naturalne, które mają tylko dwa dzielniki (liczbę 1 i samą siebie), np. 2, 3, 5, 7, 11, 13 itd.

4. Temat lekcji: Krzyżówka liczbowa „Dobrze poukładany człowieczek”

Na podstawie pracy Justyny Krawieckiej oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: ułamek zwykły, liczba dziesiętna, dzielnik liczby, rzymski system zapisu liczb.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   1) odczytuje i zapisuje liczby naturalne dodatnie w systemie rzymskim (w zakresie do 3000);
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
   3) zamienia ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe), zamienia ułamki dziesiętne skończone na ułamki zwykłe;
   5) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających ułamki zwykłe i dziesiętne;
2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie). Uczeń:
   3) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne;
   4) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby wymierne.

Rekomendacja eksperta CEO:
Pomysł jest nadzwyczajny i uczestniczka kursu określa go jako własny, co świadczy o dużej pomysłowości. Prowadzi do efektu Eureki, którym można nazwać odkrycie i potwierdzenie poszukiwanej zasady „dobrego uporządkowania”. Może być stosowany dla wskazanego, ale i dowolnego zakresu tematycznego, a możliwości modyfikacji są niemal nieograniczone. Za pomocą gry można skuteczne realizować wskazane cele dydaktyczne. Gorąco polecam do naśladowania i życzę twórczych inspiracji.

OPIS GRY

Planowane korzyści z gry:
Doskonalenie umiejętności działań na liczbach wymiernych; umiejętność współpracy w grupie. Do korzyści zaliczyć należy także kształcenie spostrzegawczości. Uczestnicy „gry" mogą postawić hipotezę dotyczącą zasad dobrego poukładania i weryfikować ją, wypełniając kolejne pola.

Przed przystąpieniem do gry należy wydrukować krzyżówkę „Dobrze poukładany człowieczek" oraz zestaw pytań-zadań w pionie i poziomie (w załącznikach poniżej).

Instrukcja:
Przeczytaj dokładnie pytania, odpowiedź wpisz w puste kratki w krzyżówce. Na podstawie wypełnionych pól krzyżówki (niekoniecznie wszystkich) powiedz, dlaczego ten człowiek jest „dobrze poukładany"?

Opis strategii uczniowskiej:
Gra stwarza możliwość odkrycia zasady określającej, dlaczego „człowiek-krzyżówka" może być nazwany dobrze poukładanym już po wypełnieniu kilku pól krzyżówki (niekoniecznie po kolei). Uczniowie, nie zawsze trafnie rozumiejąc słowo strategia gry, z pewnością zauważą, że jednym z jej elementów jest poprawne rozwiązywanie krzyżówki oraz współpraca i podział zadań w grupie.

Propozycja modyfikacji gry:
Zdecydowanie odradzam zasadę współzawodnictwa typu: „która grupa pierwsza?" i gry dla nagrody typu: wszyscy uczestnicy z grupy, która rozwiąże pierwsza, dostaną piątki (propozycja autorki). Dobrze określone cele umożliwiają grę indywidualną i zespołową, a jako nagrodę proponowałbym satysfakcję z odkrycia i zweryfikowania hipotezy dotyczącej zasady dobrego poukładania „człowieka-krzyżówki". Proponuję zagrać z instrukcją uwzględniającą próby stawiania hipotezy dotyczącej odkrywania zasady po wypełnieniu kolejnych pól i weryfikacji tej hipotezy poprzez wypełnianie kolejnych pól.

Znakomite są propozycje uczniowskie, by dobre poukładanie dotyczyło zauważenia, że pojawiają się kolejne liczby nieparzyste, kolejne parzyste, kolejne pierwsze.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Warto twórczo naśladować ten pomysł. Dobrze uporządkowany może być nie tylko „człowiek", a zasada porządkowania – różnorodna. To ona czyni z krzyżówki grę. Polecam także modyfikację instrukcji w kierunku nastawienia ucznia na poszukiwanie prawidłowości, stawianie i weryfikowanie hipotez jej dotyczących.

Załączniki:

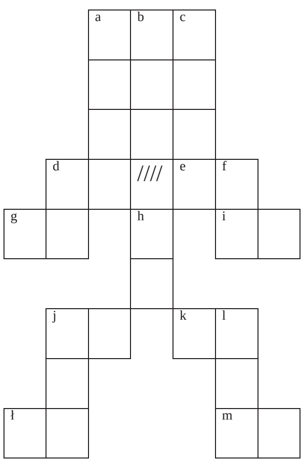
Zadania do krzyżówki.

Małe krzyżówki dla uczniów do wykorzystania jako zadania domowe.

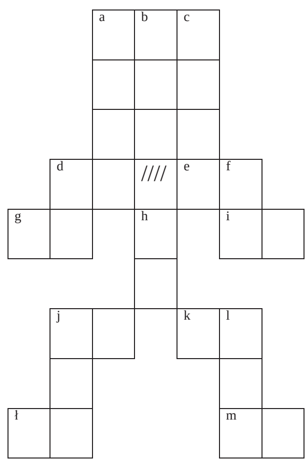
Duża krzyżówka.

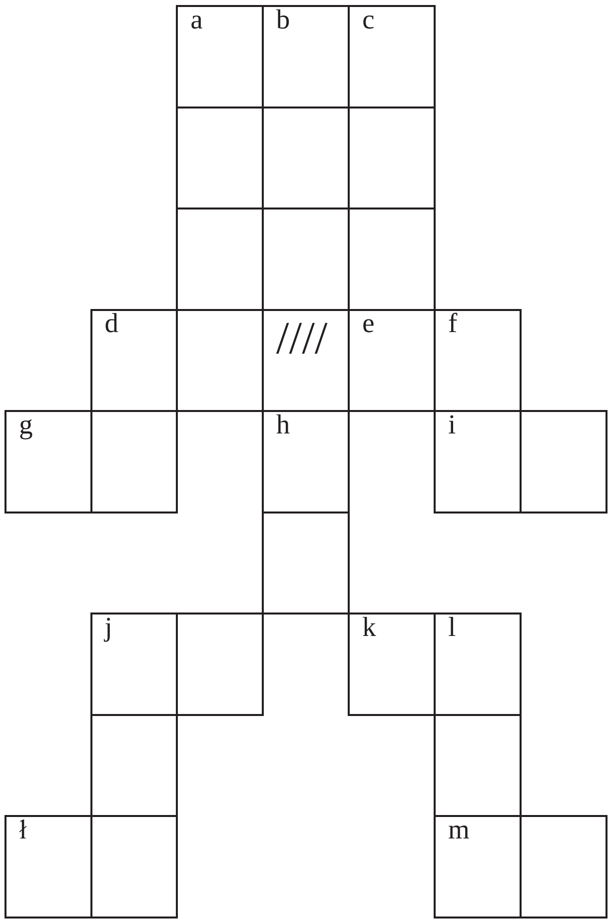
	POZIOMO		PIONOWO
d)	$5\frac{1}{4}\cdot 3\frac{1}{3}:\frac{1}{10}-86=$	a)	Oblicz czwartą część sumy wszystkich dzielników liczby 28
e)	Która liczba jest większa? $0{,}12\cdot 100........112:100$	b)	$\frac{-32:2}{2+(-10)}\cdot 257:2=$
g)	Okresem ułamka $\frac{34}{99}$ jest liczba …	c)	$8\cdot(5\frac{1}{2}-1\frac{5}{8})+5=$
i)	$4\cdot\left(4\frac{1}{2}:0{,}3\right)+2\frac{4}{5}\cdot 2{,}5=$	d)	$(-11)\cdot(-8)-4=$
j)	$(-121-19):(-4)+(-26-86):(-2)=$	f)	Suma wszystkich dzielników liczby 12 pomniejszona o 2
k)	Oblicz połowę z $\frac{2}{5}$ *liczby* 115	h)	$\frac{2}{3}$ *liczby* $87=$
ł)	$20\frac{1}{3}+40\frac{3}{5}+3\frac{8}{15}:\frac{1}{2}-1=$	j)	$234{,}5:0{,}25+9=$
m)	$(-10)\cdot(-10)-0{,}22:0{,}02=$	l)	Zapis rzymski liczby zamień na arabski: CCCLVIII

„dobrze poukładany człowieczek”



„dobrze poukładany człowieczek”




a
b
c
d
////
e
f
g
h
i
j
k
l
ł
m

5. Temat lekcji: Eksperyment z podręcznikami

Na podstawie pracy Anny Żelazowskiej oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: pole prostokąta, jednostki długości i pola.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
   4) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb;
   5) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających ułamki zwykłe i dziesiętne;
   6) szacuje wartości wyrażeń arytmetycznych;
   7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).
2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie). Uczeń:
   3) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne;
   4) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby wymierne.

10. Figury płaskie. Uczeń:
   9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów;
   10) zamienia jednostki pola.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Bardzo ciekawe pytania, efekt zaciekawienia gwarantowany. Ambitne zadania rachunkowe z przekształcaniem jednostek. Jednocześnie zadanie ćwiczy umiejętność przewidywania, która jest bardzo ograniczona w polskiej szkole.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
1. Ile podręczników do matematyki musiałby przynieść każdy Chińczyk[3], aby przykryć Polskę całkowicie?
2. Jaki wysoki byłby stos ułożony z tych podręczników, gdyby je ułożyć jeden na drugim?

Przykładowe hipotezy zaproponowane przez uczniów:
1. 2 500 sztuk.
2. 75 000 000 metrów.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Doświadczenie polega na zapoznaniu uczniów z zadaniami typu: „Pytania Fermiego".

Uczestnicy mają za zadanie obliczyć, ile podręczników do matematyki musiałby przynieść każdy Chińczyk, aby przykryć Polskę całkowicie. Następnie obliczyć, jaki wysoki byłby stos z tych podręczników, gdyby je ułożyć jeden na drugim.

W planach było również porównanie wysokości stosu książek z odległością Ziemi od Księżyca oraz z odległością Ziemi od Słońca. Niestety było to zbyt dużo na jedną lekcję, uczniowie zdążyli jedynie zająć się pierwszym zadaniem.

Pracowali w grupach czteroosobowych.

Dodatkowym zadaniem było przybliżenie postaci Fermiego i jego osiągnięć.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Liczbę podręczników.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Wymiarów podręcznika, powierzchni Polski.

Instrukcja do doświadczenia:
Wykonanie:
1. Zadaniem każdego zespołu jest udzielenie odpowiedzi na dwa pytania znajdujące się na karcie pracy.
2. W kopercie znajdują się niezbędne informacje potrzebne do rozwiązania zadania.
3. Przeczytajcie zadania oraz informacje związane z zadaniem.
4. Rozdzielcie pracę w zespole i wybierzcie: lidera, sekretarza oraz dwóch prezentujących rozwiązanie zadań.

[3] Można wybrać inną narodowość, sprawdzając wcześniej liczbę ludności np. na stronie: http://pl.wikipedia.org/wiki/Lista_pa%C5%84stw_%C5%9Bwiata_wed%C5%82ug_liczby_ludno%C5%9Bci.

5. Przy obliczeniach możecie korzystać z kalkulatora.
6. Wyniki podajcie z dokładnością do jedności.

BHP:
Pracuj w skupieniu, nie przeszkadzaj innym.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Podręcznik:
P = 16,5 cm × 24 cm = 396 cm^2
396 cm^2 × 1 350 000 000 = 534 600 000 000 cm^2 = 53,46 km^2
Powierzchnia Polski:
312 000 km^2
312 000 km^2 ÷ 53,46 km^2 ≈ 5836,14

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Wyszukaj potrzebne dane i rozwiąż zadanie:

Ile podręczników do matematyki musiałby przynieść każdy Chińczyk, aby przykryć całkowicie Stany Zjednoczone?

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Autorka poleca przeprowadzić tę lekcję w taki sposób, aby każdy uczeń mógł się skupić nad zadaniem i liczyć samodzielnie. Uwaga na skomplikowane dla gimnazjalistów rachunki.

6. Temat lekcji: Czy istnieje pierwiastek kwadratowy z liczby 2?

Na podstawie pracy Haliny Zając oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: pierwiastek kwadratowy z liczby nieujemnej, przybliżenie liczby.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) (…) mnoży (…) liczby wymierne zapisane w postaci (…) rozwinięć dziesiętnych skończonych (…) z wykorzystaniem kalkulatora;
   4) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb;
3. Potęgi. Uczeń:
   1) oblicza potęgi liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych;
4. Pierwiastki. Uczeń:
   1) oblicza wartości pierwiastków drugiego (…) stopnia z liczb, które są (…) kwadratami (…) liczb wymiernych.

Cele kształcenia – wymagania ogólne:
V. Rozumowanie i argumentacja.
Uczeń prowadzi proste rozumowania, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania.

Rekomendacja eksperta CEO:
Bardzo dobry pomysł na kompletną lekcję z filozoficznym pytaniem i dobrym wstępem do oswajania niewymierności.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy istnieje pierwiastek kwadratowy z liczby 2?

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Zmianie będą ulegać przedziały liczbowe, w których będziemy poszukiwać liczby coraz bardziej zbliżonej do pierwiastka kwadratowego z 2.

Ekspert CEO: Efektem zmiany przedziałów liczbowych jest dokładność oszacowania – można się pokusić o ocenę tej dokładności w zależności od wybranego przedziału.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Nie będziemy zmieniać liczby podpierwiastkowej podczas poszukiwania wartości liczbowej pierwiastka kwadratowego na przykład z liczby 2.

Instrukcja do doświadczenia

Wykonanie:

1. Na kartce w kratkę narysuj kwadrat o polu 1.
2. Następnie drugi kwadrat o polu 2.
3. Zastanów się, czemu jest równy bok kwadratu o polu 2.
4. Poszukaj tej liczby, która podniesiona do kwadratu daje 2.
5. Pomiędzy jakimi liczbami naturalnymi znajduje się ta liczba?
6. Postaraj się dziesięciokrotnie zawęzić przedział liczbowy, w którym jest szukana liczba
7. Postępuj tak kilkakrotnie, korzystaj w tym celu z dodatkowych tabel dołączonych do karty.
8. Wypełnij te tabele, za każdym razem sprawdzaj, czy otrzymane liczby podniesione do potęgi drugiej nie są równe 2.
9. Podaj przybliżenie pierwiastka kwadratowego z 2 do dwóch miejsc po przecinku.
10. Postępując analogicznie w ramach pracy domowej, wyznacz pierwiastek kwadratowy z:
    Liczby 3 – grupa I i IV
    Liczby 5 – grupa II i V
    Liczby 7 – grupa III i VI
11. Korzystając z kalkulatora, nie używaj podczas poszukiwań klawisza pierwiastka. Dopiero po policzeniu sprawdź swój wynik. Teraz sporządź wykres zależności pomiędzy pierwiastkiem kwadratowym z liczby a liczbą podpierwiastkową.
12. Na papierze w kratkę przygotuj układ współrzędnych (I ćwiartka). Ustaw w nim kwadraty w taki sposób, żeby jeden z boków kwadratu pokrywał się z osią x, a prawy dolny wierzchołek kwadratu był na tej liczbie na osi x, która wyraża jego pole. Zrób to przynajmniej dla kwadratów o polach: 1; 4; 9; 16; 25; 36. Zaznacz wyraźnie kropkami prawe górne wierzchołki tych kwadratów. Na przykład kropka w wierzchołku kwadratu o polu 16 jest punktem o współrzędnych (16, 4).

Połącz te kropki linią ciągłą, nie używaj do tego celu linijki. Zastanów się, co otrzymałeś. W celu dokumentowania swojej pracy wypełnij dodatkowe tabele i na kartce w kratkę narysuj opisaną wyżej zależność.

Modyfikacja eksperymentu:
Aby ułatwić uczniom odkrycie, że szukana liczba jest równa przekątnej kwadratu o boku 1, można rozpocząć od propozycji ułożenia kwadratu o polu 2 z dwóch kwadratów, każdy o polu 1 (należy wcześniej dla każdej grupy przygotować po dwa kwadraty o polu 1 oraz nożyczki). Jako zadanie dodatkowe o podwyższonym stopniu trudności można polecić uczniom wyznaczenie liczby równej pierwiastkowi kwadratowemu z liczby 2. Można zaproponować im metodę prób i błędów.

Komentarz eksperta:
Autorka zainspirowana materiałem, który znalazła na stronie http://wiki.wolnepodreczniki.pl dokonała jego twórczej adaptacji do potrzeb własnego pomysłu na lekcję o pierwiastku z dwóch. Ten schemat warto wykorzystać. Jeśli zechcemy użyć takiego szacowania dla wielu liczb na jednej lekcji, można, zamiast obliczeń na kalkulatorze, wbudować w kartę pracy interaktywne arkusze kalkulacyjne.

7. Temat lekcji: Ile ziaren ryżu znajdziesz na sześćdziesiątym czwartym polu szachownicy?

Na podstawie pracy Izabeli Lisiak oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: działania na potęgach.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
    1) odczytuje i zapisuje liczby naturalne dodatnie w systemie rzymskim (…);
    4) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb.
3. Potęgi. Uczeń:
    1) oblicza potęgi liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych;
    5) zapisuje liczby w notacji wykładniczej, tzn. w postaci a·10k, gdzie 1 ≤ a < 10 oraz k jest liczbą całkowitą.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Efekt Eureki na pewno zostanie osiągnięty. Jednocześnie propozycja obejmuje ćwiczenie działań na potęgach.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Ile ziaren ryżu znajdziesz na sześćdziesiątym czwartym polu szachownicy?

Przykładowa hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Na sześćdziesiątym czwartym polu będzie 750 000 ziaren.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Liczbę ziaren na odpowiednich polach.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Używamy tylko jednego typu ziaren (np. tylko ryżu lub tylko pęczaku).

Instrukcja do doświadczenia:
Lekcja z pytaniem problemowym.

Doświadczenie zostało zrealizowane na podstawie poniższej legendy:

LEGENDA o mędrcu Ben Daher
Mędrcowi Ben Daherowi, który żył około 1000 roku p.n.e. i który podobno był wynalazcą szachów, król Balhib w nagrodę za wymyślenie tak interesującej gry pozwolił na wybór wynagrodzenia. Daher, czyniąc zadość żądaniu króla, odezwał się w twe słowa: „Królu! Nakaż zawiadowcy Twych spichlerzy, aby mi wydał tyle ziarenek zboża, ile się nagromadzi, gdy na pierwsze pole szachownicy położymy jedno, na drugie dwa, na trzecie cztery, na czwarte osiem i na każde następne z 64 pól szachownicy podwójną liczbę ziarnek, na poprzednim polu położonych!”. Król zdumiał się błahością prośby, wszelako nakazał, by ją spełniono.

Opis doświadczenia:
Każda para uczniów otrzymuje szachownicę oraz naczynie z ryżem bądź innym ziarnem, np. pęczakiem. Uczniowie układają na poszczególnych polach ziarnka ryżu. Na pierwszym jedno, na drugim 2, na trzecim 4, na czwartym 8, na piątym 16 itd.

8. Temat lekcji: Co to jest BMI i jakie jest prawidłowe BMI dla osoby w moim wieku?

Na podstawie pracy Jolanty Jąder oraz jej ich uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: BMI, niedowaga, nadwaga, otyłość.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
   4) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb;
   5) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających ułamki zwykłe i dziesiętne.
6. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:
   2) oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych.
9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń:
   1) interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Krótkie doświadczenie, niewymagające dużego przygotowania. Ćwiczy umiejętności obliczeń i zaokrągleń i ma szansę zaciekawić uczniów.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Co to jest BMI i jakie jest prawidłowe BMI dla osoby w moim wieku?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
BMI to wskaźnik prawidłowej masy ciała. Dla dziewcząt: $16 < BMI < 23$.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Doświadczenie polegało na obliczaniu wskaźnika BMI prawidłowej wagi. Uczennice przygotowały dla wszystkich tabelki ze wskaźnikami BMI dla uczniów w wieku 14 lat oraz kilka przykładów (chłopców i dziewczynek) z podaniem ich wzrostu i wagi (na tablicy). Do obliczania wskaźnika BMI wybierały fikcyjne osoby mające wagę prawidłową, nadwagę, otyłość, niedowagę (chłopców i dziewczęta), nie obliczały wskaźnika BMI uczniów biorących udział w zajęciach, bo dla niektórych mogłoby to być krępujące.

Zmienne występujące w doświadczeniu
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Wzrost i wagę danej osoby.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
BMI.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Danych z tabeli BMI.

Instrukcja do doświadczenia:
1. Zapoznaj się z definicją BMI.
2. Wysłuchaj objaśnień pojęć i zasad obliczania BMI.
3. Wykonaj pierwsze zadanie polegające na obliczeniu BMI dla kilku wskazanych (fikcyjnych) osób.
4. Sprawdź, która z osób ma niedowagę, wagę prawidłową, nadwagę czy otyłość.
5. Odpowiedz na pytanie problemowe.

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Uczniowie mogą sprawdzić swoje BMI.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcą powtórzyć doświadczenie:
Nie obliczamy wskaźnika BMI uczniów biorących udział w zajęciach, bo dla niektórych może to być krępujące. Przygotowując zajęcia, trzeba wybrać dane kilku osób, aby uczniowie obliczali to samo zadanie.

Wybrane załączniki:
Tabela BMI:

Interpretacja BMI dla wieku ok. 14 lat		
Ocena stopnia nadwagi	**Dziewczyny**	**Chłopcy**
Niedowaga	BMI < 16,4	BMI < 16,5
Waga prawidłowa	16,4 < BMI < 23	16,5 < BMI < 23,2
Nadwaga	23 < BMI < 23,9	23,2 <BMI < 24,2
Otyłość	BMI > 23,9	BMI > 24,2

9. Temat lekcji: Ile klocków Lego potrzeba na zbudowanie domku w skali 100:1 w stosunku do przygotowanego modelu?

Na podstawie pracy Marioli Puzoń oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: skala, pola figur płaskich, jednostki długości i pola, objętość graniastosłupa.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).

10. Figury płaskie. Uczeń:
    9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów;
    10) zamienia jednostki pola;
    11) oblicza wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali.

11. Bryły. Uczeń:
    2) oblicza pole powierzchni i objętości graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym);
    3) zamienia jednostki objętości.

Rekomendacja eksperta CEO:
Doświadczenie wskazuje na użyteczność matematyki w życiu codziennym. Stwarza potrzebę dyskusji nad hipotezą oraz dyskusji po jej zweryfikowaniu; stwarza szansę licznych modyfikacji.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Ile klocków Lego potrzeba na zbudowanie domku w skali 100:1 w stosunku do przygotowanego modelu?

Przykładowa hipoteza zaproponowana przez uczniów:
3000000.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Uczniowie mają ustalić, ile klocków Lego należałoby użyć do zbudowania domku do zamieszkania – w skali 100:1 w stosunku do wykonanego modelu:

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Skalę modelu.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Liczbę klocków do budowy.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Wymiarów poszczególnych typów klocków.

Instrukcja do doświadczenia:
1. Uczniowie otrzymują model domku wykonany z klocków Lego.
2. Uczniowie liczą poszczególne typy klocków w modelu i określają ich kształt oraz wymiary.
3. Uczniowie zastanawiają się, ilu poszczególnych klocków należałoby użyć, gdyby zbudować na podstawie modelu rzeczywisty domek w skali 100:1 i stawiają hipotezę dotyczącą ogólnej liczby klocków.
4. Uczniowie weryfikują hipotezę, wykonując potrzebne obliczenia.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Uczniowie powinni mieć możliwość bezpośredniej pracy z modelem w celu obliczenia liczby poszczególnych typów klocków; rozebrania modelu i ustalenia wymiarów poszczególnych klocków.

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
– obliczanie liczby klocków na ściany działowe;
– wykonanie obliczeń z uwzględnieniem okien.

10. Temat lekcji: Jak przewidzieć sumę trzech liczb, znając tylko pierwszą z nich?

Na podstawie pracy Beaty Wróbel oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: suma liczb.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
1. Liczby wymierne dodatnie.
2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie).

Rekomendacja ekspertki CEO:
Pomysł gwarantuje efekt Eureki i zachęca uczniów do szukania metody, którą posłużył się nauczyciel.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Jak przewidzieć sumę trzech liczb, znając tylko pierwszą z nich?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Aby odgadnąć sumę, trzeba znać metodę.

OPIS DOŚWIADCZENIA:

Instrukcja do doświadczenia:
Wskazany uczeń podaje dowolną liczbę pięciocyfrową (n).

Nauczyciel zapowiada, że umie przewidzieć, ile wyniesie suma 3 liczb (n+m+p): podanych przez ucznia i dwóch (m i p), które zostaną zaraz dopisane (jedna przez ucznia, jedna przez nauczyciela).

Nauczyciel prosi kolejnego ucznia o wskazanie następnej liczby pięciocyfrowej – m.

Nauczyciel dopisuje liczbę p.

Uczniowie liczą sumę n+m+p i sprawdzają, czy nauczyciel dobrze przewidział.

Instrukcja postępowania:
Wyjaśnienie „magii" zjawiska przewidywania:

klucz jest w podaniu przez nauczyciela właściwej wartości trzeciej liczby – p, powinna ona wynosić 99 999 – m. Wtedy m+p = 99 999, a więc suma n+m+p = n +99 999. Znając pierwszą liczbę – n, nauczyciel może dokonać właściwego przewidywania sumy, gdyż dodawanie do dowolnej liczby pięciocyfrowej liczby 99 999 (= 100 000 – 1) polega na dopisaniu przed liczbą cyfry 1 i odjęciu od ostatniej cyfry 1. Na przykład 52 618 + 99 999 = 152 617.

Po podaniu przez pierwszego ucznia pierwszej liczby n, nauczyciel przewiduje wynik (dodaje do liczby n liczbę 99999) i ogłasza go uczniom. Drugi uczeń podaje swoją liczbę m. Nauczyciel szybko oblicza liczbę p (p = 99 999 – m). Jest to bardzo prosty rachunek, który można wykonać w pamięci. Uczniowie sprawdzają, że suma liczb n+m+p jest zgodna z przewidzianą przez nauczyciela sumą.

Uwagi:
- trzecia liczba w sumie, ta, którą podaje nauczyciel, nie musi być już liczbą pięciocyfrową.
- pierwszą liczbą nie powinna być liczba 10 000.W przypadku, gdy uczniowie podadzą dwie liczby równe 99 999, nauczyciel musi podać jako trzecią liczbę – zero.

11. Temat lekcji: Czy składka w wysokości 10 zł wystarczy na zorganizowanie poczęstunku z podanym menu na wieczorek klasowy dla 24 osób?

Na podstawie pracy Marzenny Rybko oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: cena, działania na liczbach wymiernych, rozwinięcie dziesiętne liczby.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
   4) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb;
   7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).

Rekomendacja eksperta CEO:
Uczniowie, weryfikując hipotezę ćwiczą wiele umiejętności i korzystają z wiadomości, których opanowanie przewiduje podstawa programowa. Rozwiązanie problemu nie jest jednoznaczne, a propozycja pracy domowej kieruje uczniów ku dojrzałym zachowaniom konsumenckim. Pomysł może być wykorzystany w wielu modyfikacjach przez innych nauczycieli; jego ważną zaletą jest ukazanie przydatności matematycznych umiejętności w codziennym życiu.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy składka w wysokości 10 zł wystarczy na zorganizowanie poczęstunku z podanym menu na wieczorek klasowy dla 24 osób?

Przykładowa hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Taka składka nie wystarczy na przygotowanie planowanego poczęstunku.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Materiały:
Instrukcja dla ucznia wraz z podanym menu na wieczorek klasowy, przepisem na sałatkę oraz cennikiem towarów dwóch wybranych sklepów.

Instrukcja dla ucznia:
Klasa I b ma zamiar zorganizować wieczorek klasowy. W wieczorku wezmą udział 24 osoby (razem z wychowawcą). Na menu, które należy przygotować lub kupić na ten wieczorek składa się: sałatka z serem feta, pączki (po 1 na osobę), lizaki serduszka (po 2 na osobę), orzeszki (paczka na 4 osoby), paluszki (paczka na 3 osoby), jabłka (10 dag na osobę), winogrona (15 dag na osobę), napój pomarańczowy 2 l (0,5 l na osobę), woda mineralna 1,5 l (0, 5 l na osobę).

Zakupy należy zrobić w sklepie ABC lub w sklepie XYZ. Oczywiście część produktów można kupić w jednym sklepie, a część w drugim. Spróbuj, nie wykonując obliczeń, odpowiedzieć na pytanie: „Czy składka w wysokości 10 zł wystarczy na zorganizowanie poczęstunku z podanym menu na wieczorek klasowy dla 24 osób?”

Uwaga! Wychowawca nie płaci za wieczorek. Następnie wykonaj wszystkie potrzebne obliczenia, aby sprawdzić swoją hipotezę. Możesz używać kalkulatora.

Przepis na sałatkę dla 4 osób:

Potrzebne produkty: 20 dag sera feta, 40 dag pomidorów, 30 dag ogórków, 20 dag czerwonej cebuli, 15 dag czerwonej papryki, 1/2 słoiczka czarnych oliwek bez pestek, 1 sos sałatkowy.

Cennik artykułów:

Cena (zł) / **Nazwa artykułu**	**Sklep ABC**	**Sklep XYZ**
Ser feta (20 dag)	5,47	6,02
Pomidory (1 kg)	3,99	3,82
Ogórki (1 kg)	3,73	3,64
Cebula czerwona (1 kg)	2,09	2,31
Papryka (1 kg)	8,16	8,27
Oliwki (1 słoiczek)	10,19	9,99
Sos sałatkowy	1,48	1,30
Pączki (1 szt.)	0,47	0,52
Lizaki serduszka (1 szt)	0,14	0,13
Orzeszki ziemne (paczka)	6,42	6,28
Paluszki słone (paczka)	3,37	3,29

Cena (zł) / Nazwa artykułu	Sklep ABC	Sklep XYZ
Jabłka (1 kg)	3,33	3,48
Winogrona (1 kg)	7,19	6,93
Napój pomarańczowy (2 l)	2,53	2,48
Woda gazowana (1,5 l)	1,71	1,74

Przebieg zajęć:
Uczniów dzielimy na 3- lub 4-osobowe grupy. Każda grupa oblicza koszt poczęstunku na podstawie otrzymanego menu oraz cennika. Swoje obliczenia weryfikuje z hipotezą.

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Sprawdź ceny potrzebnych produktów w sklepie w swojej miejscowości. Wykonaj obliczenia dla nowych cen. Odpowiedz na pytanie: „Czy wystarczyłoby zebranych pieniędzy, gdybyśmy robili zakupy w Twojej miejscowości".

12. Temat lekcji: Ile kilogramów kaszy potrzeba, aby zakryć nią całą podłogę w klasie?

Na podstawie pracy Wiesławy Szurnickiej oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: powierzchnia prostokąta, jednostki miary, jednostki wagi, zamiana jednostek.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
10. Figury płaskie. Uczeń:
   9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów;
   10) zamienia jednostki pola.

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
   4) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb;
   5) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających ułamki zwykłe i dziesiętne;
   6) szacuje wartości wyrażeń arytmetycznych;
   7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).

Rekomendacja ekspertki CEO:
Czysta matematyka w praktyce.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Ile kilogramów kaszy potrzeba, aby zakryć nią całą podłogę w klasie?

OPIS DOŚWIADCZENIA

Doświadczenie polega na obliczeniu, ile kilogramów kaszy potrzeba do zakrycia całej powierzchni podłogi w sali, w której odbywają się zajęcia Szkolnego Koła Naukowego. Uczniowie zajmują się obliczeniami dotyczącymi dwóch rodzajów kaszy: kaszy gryczanej oraz kaszki manny. Zadanie polega na obliczeniu pola prostokątnej podłogi oraz utworzeniu z kaszy małych prostokątów (mieli do dyspozycji 10 dag kaszy) i obliczeniu pól tych prostokątów. Następnie należy ustalić ile małych prostokątów z kaszą zmieści się na podłodze.

Najlepiej wykonać to doświadczenie w grupach.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Rodzaj kaszy (manna, gryczana).

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Ilość kaszy.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Powierzchni klasy.

Instrukcja do doświadczenia:
Mamy do dyspozycji 10 dag kaszy, przyrządy do mierzenia (miara 20 m; linijka długości 20 cm) i kalkulator. Waszym zadaniem jest sprawdzenie, ile kilogramów kaszy potrzeba, aby zakryć nią całą powierzchnię w klasie.

Zaplanujcie swoją pracę i wykonajcie odpowiednie obliczenia.

BHP
Postarajcie się nie zabrudzić powierzchni klasy, jeśli coś się rozsypie, posprzątajcie.

Plan pracy:
Dokonamy pomiaru klasy (długość i szerokość), następnie na podstawie tych pomiarów obliczymy pole powierzchni podłogi w klasie.

Z przygotowanej kaszy utworzymy dwa prostokąty (jeden z kaszą gryczaną, drugi z kaszą manną), zmierzymy długość i szerokość tych prostokątów oraz obliczymy pola tych prostokątów.

Obliczymy, ile prostokątów z kaszą zmieści się na podłodze klasy oraz obliczymy, ile waży ta kasza.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Obliczenia uczniowskie:
Wymiary klasy: długość a = 6,34 m = 634 cm, szerokość b = 5,70 m = 570 cm
Pole klasy:
$P = a \times b$
$P = 634 \times 570$
$P = 361\,380\ (cm^2)$

Wymiary prostokąta z kaszą gryczaną: długość c = 18 cm, szerokość d = 25 cm
Pole prostokąta z kaszą gryczaną:
$P = c \times d$
$P = 18 \times 25\ 361\,380\ cm^2 \div 450\ cm^2 \approx 803{,}1$
$P = 450\ (cm^2)\ 803{,}1 \times 10$ dag = 8 031 dag = 80,31 kg
Odp. Potrzeba około 80 kg kaszy gryczanej.

Wymiary prostokąta z kaszką manną: długość e = 37 cm, szerokość f = 35 cm
Pole prostokąta z kaszką manną:
$P = e \times f$
$P = 37 \times 35\ 361\,380\ cm^2 : 1\,295\ cm^2 \approx 279{,}1$
$P = 1\,295\ (cm^2)\ 279{,}1 \times 10$ dag = 2 791 dag = 27,91 kg
Odp. Potrzeba około 28 kg kaszki manny.

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Wykonamy obliczenia i pomiary dotyczące innych rodzajów kaszy, ryżu, piasku itp.

Można też mierzyć pole dowolnej powierzchni (również w kształcie koła).

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcą powtórzyć doświadczenie:
Trzeba najpierw ustalić z uczniami, co znaczy pokryć powierzchnię. Jaka ma być grubość pokrywy?

13. Temat lekcji: Gra dydaktyczna: kółko – krzyżyk

Na podstawie pracy Doroty Rybarz oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: dzielenie liczb dziesiętnych.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) (…) dzieli liczby wymierne zapisane w postaci (…) rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (…).

OPIS GRY

Planowane korzyści z gry:
Utrwalisz dzielenie liczb dziesiętnych, starając się wykonywać je w jak najkrótszym czasie.

Gra dydaktyczna: kółko – krzyżyk.

Plansza – duży kwadrat podzielony na 36 małych kwadratowych pól, na których zamieszczone są rozwiązania ilorazów liczb dziesiętnych. Grają drużyny lub pary uczniów, zakrywając kolejno wybierane przez siebie pola. Aby zakryć pole z liczbą, należy odnaleźć właściwy przykład, którego rozwiązaniem jest właśnie ta liczba. Zwycięża ta drużyna, która pierwsza zakryje w pionie, w poziomie lub po przekątnej obok siebie 4 pola.

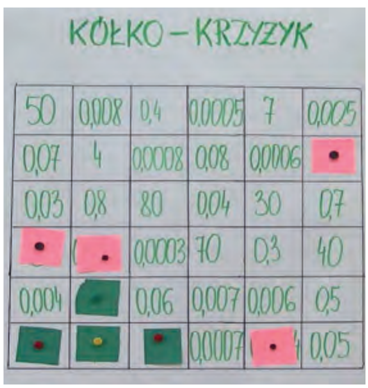
Aby w grze uczestniczyli wszyscy uczniowie, powinni zmieniać się kolejno przy odpowiedziach w każdej z grup.

Instrukcja gry:
Gra składa się z:
– planszy – duży kwadrat podzielony na 36 małych, w których umieszczone są rozwiązania ilorazów liczb dziesiętnych,
– karty, na której zamieszczone są działania do rozwiązania,
– pionków w dwóch kolorach (jedne symbolizują krzyżyk, a drugie kółko) lub, jeśli początkowo grają dwa zespoły i plansza jest przyklejona do tablicy, wtedy używamy magnesów w dwóch kolorach.

Zasady gry:
Gra polega na ustawieniu przez gracza (= zespół) w linii prostej, obok siebie czterech pionków tego samego koloru (poziomo, pionowo lub po przekątnej). Jednak przed postawieniem pionka na danym polu z określoną liczbą gracz wśród działań w oknie szuka takiego przykładu, którego rozwiązaniem jest ta właśnie liczba. Gracze grają na przemian. Jeśli gracz wskaże błędne działanie z okna do wybranego pola, wtedy traci ruch. Zwycięża gracz, który pierwszy ustawi w linii prostej cztery swoje pionki.

Propozycja modyfikacji gry:
Grę można zmodyfikować, umieszczając na planszy inne liczby, a na karcie inne działania, np. z zakresu mnożenia, potęgowania czy pierwiastkowania.

Wybrane załączniki:
Przykładowa plansza z pionkami



Przykładowa karta

1. 0,32:0,8 = 2. 3,2:0,8 = 3. 0,032:0,8 = 4. 16:0,4 = 5. 0,024:6 = 6. 0,024:60 =	7. 42:6 = 8. 0,42:6 = 9. 0,42:0,6 = 10. 42:0,6 = 11. 0,042:6 = 12. 0,042:60 =	13. 36:6 14. 0,36:6 = 15. 0,36:0,6 = 16. 36:0,6 = 17. 0,036:6 = 18. 0,036:60 =
19. 35:7 = 20. 0,35:7 = 21. 0,35:0,7 = 22. 35:0,7 = 23. 0,035:7 = 24. 0,035:70 =	25. 12:4 = 26. 0,12:4 = 27. 0,12:0,4 = 28. 12:0,4 = 29. 0,012:4 = 30. 0,012:40 =	31. 48:6 = 32. 0,48:6 = 33. 0,48:0,6 = 34. 48:0,6 = 35. 0,048:6 = 36. 0,048:60 =

14. Temat lekcji: Ile czasu zajmie podróż samochodem wzdłuż granic Polski? Zakładamy, że samochód jedzie z prędkością 60 km/h

Na podstawie pracy Izabeli Lisiak oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: długość granic Polski, prędkość pojazdu, szacowanie i zaokrąglanie wyników.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);

4) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb;
5) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających ułamki zwykłe i dziesiętne;
6) szacuje wartości wyrażeń arytmetycznych;
7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).

Rekomendacja ekspertki CEO:
Ciekawe, interdyscyplinarne zadanie, łączące geografię, matematykę i ekonomię! Praktyczne zastosowanie matematyki, bardzo przydatne w życiu.

Podczas lekcji uczniowie odpowiadali na dwa pytania problemowe:
1. Ile czasu zajmie podróż samochodem wzdłuż granic Polski?
2. Ile zapłacimy za tę podróż?

Uczniowie otrzymali niezbędne dane, czyli mapkę z długością granic Polski oraz aktualną cenę benzyny w naszym mieście. Oczywiście należało założyć, z jaką prędkością jedzie samochód oraz ile benzyny spala na 100 km.

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Ad. 1. Ok. 60 h.
Ad. 2. 450 zł.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu
Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Czas przejazdu, koszt przejazdu.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Długości granic, prędkości pojazdu, ceny benzyny.

Instrukcja do doświadczenia:
– Uczniowie otrzymują mapę obrazującą długości granic Polski (zachodnia, południowa, wschodnia oraz linia brzegowa).
– Obliczają obwód Polski.
– Na podstawie założonej prędkości pojazdu obliczają czas przejazdu.
– Znając cenę benzyny oraz wiedząc, ile benzyny spala nasz samochód, obliczają przybliżone koszty tej podróży.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
– 210 + 104 + 418 + 535 + 541 + 796 + 467 + 440 = 3511 km – obwód Polski.
– 3511 ÷ 60 = 58,51(6) ≈ 58,5 h – czas przejazdu.
– 3511 × 5 ÷ 100 = 175,551 – tyle benzyny spali samochód, objeżdżając całą Polskę.
– 175,55 × 4,70 = 825,085 zł ≈ 825 zł – koszty benzyny.

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Można włączyć w doświadczenie inne pojazdy, np.:

W jakim czasie przejedzie się wzdłuż granic Polski rowerem, wiedząc, że rower jedzie z prędkością 15 km/h?

15. Temat lekcji: Budujemy liczby trójkątne

Na podstawie pracy Justyny Lisickiej oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: liczba naturalna, suma, wyrażenie algebraiczne, wartość liczbowa wyrażenia algebraicznego.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
   5) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających ułamki zwykłe i dziesiętne.
6. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:
   1) opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami;
   2) oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych.

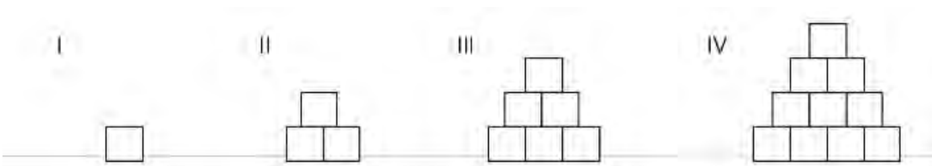
Rekomendacja ekspertki CEO:
Ciekawe przejście od praktyki do uogólnienia. Doświadczenie zaciekawia uczniów. Wcześniej nie spotkali się z pojęciem liczby trójkątnej. Mogli budować liczby, konstruując piramidy z klocków, którymi bawili się w dzieciństwie. Mieli też okazję sami wymyślić wzór, a następnie odpowiedzieć na pytanie problemowe.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy liczba 5050 jest liczbą trójkątną? Odpowiedź uzasadnij.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Uczniowie, pracując w parach, mają stwierdzić, czy podana liczba 5050 jest liczbą trójkątną. Uczniowie zostają zapoznani z definicją liczby trójkątnej. „Budują” z klocków Lego kolejne liczby trójkątne, uzupełniają tabelkę w instrukcji, dochodzą do wzoru na n-tą liczbę trójkątną i sprawdzają, czy 5050 jest liczbą trójkątną.

Instrukcja do doświadczenia:
1. Zapoznaj się z definicją liczby trójkątnej:
   Wyobraź sobie, że układasz konstrukcję z klocków według wzoru:



   Suma kolejnych liczb naturalnych:

1	1 + 2 = 3	1 + 2 + 3 = 6	1 + 2 + 3 + 4 = 10

   Tak ułożone klocki ilustrują liczby 1, 3, 6, 10 zwane liczbami trójkątnymi.
2. „Zbuduj” z klocków kolejne liczby trójkątne. Pamiętaj, by klocek z kolejnej warstwy leżał na dwóch klockach z warstwy poprzedniej. Kolejna warstwa ma o jeden klocek mniej, czyli zaczynając od podstawy z n klocków w następnej warstwie, musimy ułożyć n-1 klocków. Na szczycie piramidy musi być tylko jeden klocek. Piramida skończona = liczba trójkątna ułożona.
   Liczba „pięter” piramidy to numer liczby trójkątnej, a suma wszystkich klocków to nasza liczba trójkątna.
   Zbuduj z klocków kilka liczb trójkątnych.

3. Uzupełnij tabelkę.
4. Odpowiedz na pytanie kluczowe: Czy liczba 5050 jest liczbą trójkątną? Jeśli tak, to którą z kolei liczbą trójkątną jest ta liczba?

BHP:
Przy układaniu klocków uważaj na palce.

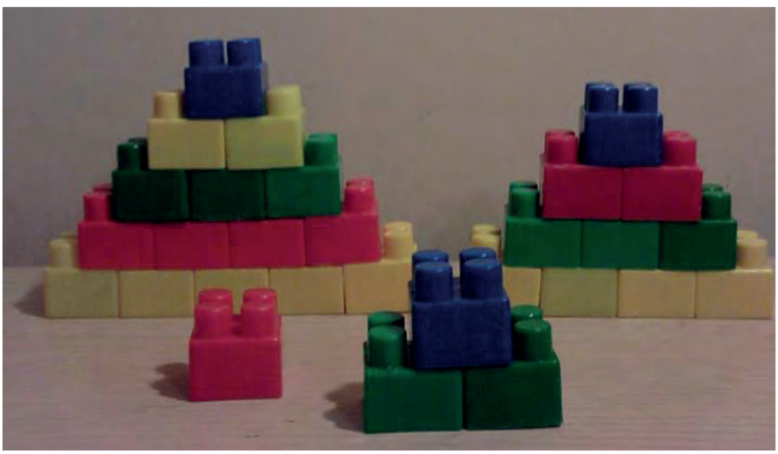
Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	n

1. W pierwszym wierszu wpisane są kolejne liczby naturalne większe od 0 (będą to numery kolejnych liczb trójkątnych).
2. W drugim wierszu najpierw wpisz 1 (to pierwsza liczba trójkątna – jeden „klocek”), następne liczby trójkątne otrzymasz jako sumę liczby stojącej bezpośrednio przed nią i liczby stojącej nad nią.
3. Nie warto w ten sposób liczyć setnej liczby trójkątnej! Popatrz uważnie na swoją tabelkę i wymyśl wzór na liczbę trójkątną o numerze n i zapisz go w tabelce.
4. Zgadnij, którą liczbą trójkątną może być liczba 5050? Sprawdź swoją hipotezę, wstawiając ją do wzoru.

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Można zaproponować uczniom inne liczby do weryfikacji, na przykład liczby kwadratowe czy pięciokątne.

Wybrane załączniki:
Przykładowe piramidy z klocków ilustrujące liczby trójkątne



16. Temat lekcji: Czy człowiek współczesny jest człowiekiem witruwiańskim?

Na podstawie pracy Małgorzaty Popy oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: człowiek witruwiański, wysokość, rozpiętość ramion, szacowanie, jednostka długości – centymetr.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   6) szacuje wartości wyrażeń arytmetycznych;
   7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).
8. Wykresy funkcji. Uczeń:
   4) odczytuje i interpretuje informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym).
9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń:
   1) interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów;
   2) wyszukuje, selekcjonuje i porządkuje informacje z dostępnych źródeł;
   3) przedstawia dane w tabeli za pomocą diagramu słupkowego lub kołowego.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Doświadczenie może zaciekawić uczniów. Pokazuje, że nikt nie jest idealny.

Źródło:
„Pracę swoją wzorowałam na materiałach dydaktycznych, jakie otrzymałam na warsztatach przeprowadzonych w Obornikach przez Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe”.

OPIS DOŚWIADCZENIA – lekcji z pytaniem problemowym

Po krótkim wprowadzeniu uczeń „ochotnik” poddaje się badaniu. To znaczy: wyznaczona para uczniów mierzy rozpiętość ramion i wysokość „ochotnika”. Dokonane pomiary porównujemy. Obliczamy różnicę i iloraz. Jeżeli jest bliski 1 – to mamy ideał! Następnie mierzymy kolejnych ochotników. Wyniki umieszczamy w tabeli. Potem sporządzamy wykres w Excelu, na osi pionowej zaznaczając centymetry, zaś na osi poziomej numery kolejnych „ochotników”.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Wysokość i rozpiętość ramion.

Instrukcja do doświadczenia:
1. Przygotuj taśmę mierniczą, sznurek, ekierkę.
2. Przeszkolona osoba mierzy wzrost „ochotnika”, pomaga sobie ekierką (dużą szkolną), aby dokładnie odczytać wynik.
3. Kolejna osoba mierzy za pomocą sznurka rozpiętość ramion.
4. Zapisujemy dane w tabelce.
5. Obliczamy różnicę i iloraz danych i wpisujemy je do tabeli.
6. Analizujemy wyniki i przedstawiamy w postaci wykresu.

BHP:
Pamiętaj o zachowaniu bezpieczeństwa podczas pomiarów wysokości, ostrożnie przykładaj ekierkę do głowy osoby mierzonej.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Wyniki pomiarów

Ochotnik	Wzrost	Rozpiętość ramion	Różnica	Iloraz
1				
2				

17. Temat lekcji: Czy mnożenie można wykorzystać do zamiany ułamków zwykłych na ułamki dziesiętne i odwrotnie?

Na podstawie pracy Barbary Gruchot oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Barbara Uniwersał

Podstawowe pojęcia: ułamek zwykły, ułamek dziesiętny, mnożenie ułamków.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
   3) zamienia ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe), zamienia ułamki dziesiętne skończone na ułamki zwykłe.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Do tej pory starałam się unikać rekomendowania doświadczeń inspirowanych wyraźnie podręcznikiem czy innymi gotowymi materiałami. Zdecydowałam się wskazać powyższe ze względu na coś, co określiłabym jako „inną perspektywę” pozwalająca spojrzeć na znany problem nieco inaczej. Ta odmienność może być wstępem do niestandardowego myślenia i rozwoju technik kreatywnych, rozwoju twórczości – przydatnej również w matematyce.

Źródło:
Matematyka 1, praca zbiorowa pod redakcją M. Dobrowolskiej, wyd. Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2009.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Ułamki o rozwinięciach dziesiętnych skończonych i nieskończonych okresowych.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Postać iloczynową ułamków i wynik mnożenia.

Instrukcja do doświadczenia:
Uzupełnij poniższe tabelki, możesz zastosować się do naszych wskazówek.

Ułamki zwykłe	**Iloczyn ułamków zwykłych**	**Iloczyn ułamków dziesiętnych**	**Wynik mnożenia ułamków dziesiętnych**
$\frac{1}{4}=$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=$	$0{,}5 \cdot 0{,}5 =$	0,25
$\frac{1}{8}=$			
$\frac{1}{16}=$			
$\frac{4}{5}=$			
$\frac{7}{40}=$			
Podaj własny przykład			

Wiedząc, że $\frac{1}{36}=0{,}02(7)$, zapisz rozwinięcia dziesiętne podanych liczb:

Liczba	**Iloczyn ułamków zwykłych**	**Iloczyn ułamków dziesiętnych**	**Wynik**
$\frac{100}{36}=$	$100\cdot\frac{1}{36}=$	$100 \cdot 0{,}02(7)$	2,(7)
$10\cdot\frac{1}{36}=$			
$\frac{1}{360}=$			
$\frac{1}{3600}=$			

Tabelka dla chętnych

$\frac{7}{9} = 0,(7)$ $\frac{2}{9} = 0,(2)$ $\frac{3}{9} = 0,(3)$

Przypominamy Ci, że

$\frac{14}{99} = 0,(14)$ $\frac{5}{99} = 0,(05)$ $\frac{65}{99} = 0,(65)$

Ułamki o rozwinięciu nieskończonym i okresowym	**Iloraz ułamków dziesiętnych przez potęgę liczby 10**	**Iloraz ułamków zwykłych**	**Wynik dzielenia (ułamek zwykły)**
0,1(3) =	1,(3) : 10 =	$1\frac{3}{9} : 10 = \frac{\cancel{12}}{9} \cdot \frac{1}{\cancel{10}} =$	$\frac{6}{45}$
0,02(7) =	2,(7) : 100 =	$2\frac{7}{9} : 100 = \frac{\cancel{25}}{9} \cdot \frac{1}{\cancel{100}} =$	$\frac{1}{36}$
0,3(4) =			
1,1(21) =			
Podaj własny przykład			

18. Temat lekcji: Czy milion złotych zmieści się w moim pokoju?

Na podstawie pracy Doroty Martki oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: polskie jednostki monetarne, średnica okręgu, jednostki wagi, objętość prostopadłościanu.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   6) szacuje wartości wyrażeń arytmetycznych;
   7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (…).
9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń:
   1) interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów;
   2) wyszukuje, selekcjonuje i porządkuje informacje z dostępnych źródeł;
   3) przedstawia dane w tabeli, za pomocą diagramu słupkowego lub kołowego.
11. Bryły. Uczeń:
   2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego (…).

Rekomendacja eksperta CEO:
Rozwiązując ten problem, uczniowie musieli korzystać z umiejętności i różnych treści matematycznych. Potrzebna była rzeczywista aktywność, wyszukiwanie informacji, pomiary, szacunki, obliczenia. Część z pomiarów wykonanych było poza szkołą.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy milion złotych zmieści się w moim pokoju?

Hipotezy zaproponowane przez uczniów:
Milion złotych nie zmieści się w pokoju.

Myślę, że nawet rozmieniając milion na 1-groszówki zmieszczę go w pokoju o wymiarach 3 × 4 × 2,5 m.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu

Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
W doświadczeniu zmieniać będziemy rodzaje monet.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Będziemy obserwować, ile monet można ściśle ułożyć na danej powierzchni oraz ile potrzebujemy warstw do ułożenia 1 mln zł.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Nie będziemy zmieniać kwoty głównej, którą poddajemy obserwacji oraz wymiarów powierzchni do pokrycia (3 m x 4 m, wysokość 2,5 m).

Instrukcja do doświadczenia

– wybierz jeden rodzaj monet, dla których chcesz przeprowadzić badanie,
– odczytaj z tabeli (Załącznik nr 1) średnicę jednej monety,
– sprawdź, ile monet można ściśle ułożyć na danej powierzchni,
– sprawdź, ile otrzymamy warstw oraz jak wysoka będzie całość,
– sprawdź, jak duże musi być pudełko, aby zapakować te monety,
– wykonaj odpowiednie obliczenia.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:

Uczniowie zamieścili rysunki ukazujące sposób ułożenia monet oraz przeprowadzili klasyczne rachunki w kartach pracy, by zweryfikować hipotezę. Dokonywali pomiarów monet i ważyli je w aptece.

Propozycja modyfikacji eksperymentu:

1. Pytanie postawione w temacie „Czy milion złotych zmieści się w moim pokoju?” można rozwinąć o kolejne: „Czy strop domu utrzyma milion złotych w naszym pokoju?”, „Ile miejsca zajmuje wolna przestrzeń pomiędzy tak ułożonymi monetami?”.
2. „Jak wysoka może być wieża o wartości 1 mln zł oraz z czym możemy ją porównać (wysokość drzewa, wieżowca, odległość z Ziemi do Księżyca)?”.
3. „Czy układając obok siebie monety warte 1 mln zł otoczymy podwórko, lotnisko czy równik?”.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł: Poniżej znajduje się tabela, która umożliwi wykonanie tych zadań. Proponuję ją powiększyć i umieścić w widocznym miejscu w klasie. Dane dotyczące wagi zebrali uczniowie jeszcze przed zajęciami dzięki życzliwości pani aptekarki, natomiast średnice i grubości monet mierzyli samodzielnie, a swoje pomiary zweryfikowali z informacjami znalezionymi w Internecie.

Wybrane załączniki:
Wymiary polskich monet

Nominał monety	Średnica w mm	**Grubość w mm**	**Masa w g**
1gr	15,5	1,3	1,64
2 gr	17,5	1,3	2,13
5 gr	19,5	1,3	2,59
10 gr	16,6	1,6	2,51
20 gr	18,5	1,6	3,22
50 gr	20,5	1,7	3,94
1 zł	23	1,7	5
2 zł	21,5	2	5,21
5 zł	24	2	6,54

19. Temat lekcji: Domino matematyczne – gra dydaktyczna

Na podstawie pracy Anny Choręziak oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: ułamki zwykłe i dziesiętne, rozszerzanie i skracanie ułamków, działania na ułamkach.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);

3) zamienia ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe), zamienia ułamki dziesiętne skończone na ułamki zwykłe;
4) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb;
5) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających ułamki zwykłe i dziesiętne.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Gotowe domino matematyczne.

OPIS GRY

Planowane korzyści z gry:
Utrwalenie umiejętności wykonywania działań na ułamkach.

Instrukcja gry:
Uczniowie zostają podzieleni na czteroosobowe zespoły. Każdy zespół otrzymuje zestaw klocków domino z ułamkami oraz kartę pracy. Po zapoznaniu się z celami zajęć oraz instrukcją uczniowie przystępują do gry.

Zasady gry w domino:
1. Rozkładamy wszystkie kostki domina.
2. Rozpoczynamy partię, układając element z napisem POCZĄTEK.
3. Gracze kolejno dokładają kostki tak, aby do boku kostki z pewnym działaniem lub liczbą był dołożony bok takiej kostki, na której jest wyrażenie lub liczba o tej samej wartości.
4. Gra zostaje zakończona w momencie, gdy na ostatniej kostce będzie napis KONIEC.
5. Wygrywa ta grupa, która pierwsza ułoży wszystkie kostki domina.

DOMINO MATEMATYCZNE – UŁAMKI

$\frac{1}{5}:\frac{1}{3}$	0,35
$\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
0,5	$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$
$\frac{7}{6}$	0,6
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$
POCZĄTEK	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
$\frac{5}{12}$	0,4

0,375	$\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$
$\frac{1}{5}$	$0,2\cdot 3$
$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}:\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}:\frac{5}{6}$	0,2
$1\frac{1}{8}$	0,5
$0,5\cdot 0,7$	KONIEC
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$

20. Temat lekcji: Oblicz, czy prawidłowo się odżywiasz?

Na podstawie pracy Moniki Brodzińskiej oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: działania na liczbach, przeliczanie kalorii, zamiana jednostek.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
   3) zamienia ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe), zamienia ułamki dziesiętne skończone na ułamki zwykłe;
   7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (…).
5. Procenty. Uczeń:
   2) oblicza procent danej liczby.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Bardzo pożyteczne zadanie. Uświadamia uczniom, jak powinni się odżywiać. Eksperyment łatwy do naśladowania. Dodatkowa korzyść to ćwiczenie obliczeń.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy prawidłowo się odżywiasz?

Przykładowa hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Nie odżywiam się prawidłowo.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Grupa uczniów przygotowała lekcję na temat „Oblicz, czy prawidłowo się odżywiasz?". Podczas lekcji każdy uczeń miał ułożyć swój jadłospis na podstawie tego, co spożywa. Następnie członkowie grupy wyjaśnili wszystkim kolegom, jakie jest zapotrzebowanie odżywcze ucznia gimnazjum w wieku 13–15 lat i że ich dieta powinna wynosić 2600–2800 kcal (*Załącznik nr 1*). Później podzielili klasę na 4 grupy pięcioosobowe, w których uczniowie musieli przeliczyć kalorie i opracować prawidłowy jadłospis gimnazjalisty.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Jadłospis gimnazjalisty.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Z ilu kalorii składa się jadłospis gimnazjalisty.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Kalorii wybranych produktów.

Instrukcja do doświadczenia:
Zad. 1. Praca indywidualna: Na podstawie tego, jak się odżywiasz, ułóż własny jadłospis. Następnie skorzystaj z materiałów pomocniczych (*Załącznik nr 2*), odczytaj wartości kaloryczne produktów i oblicz, ile wynosi dzienne spożycie przez Ciebie kalorii.

Zad. 2 Praca w grupach.

Wybrane załączniki:
Załącznik nr 1: Zapotrzebowanie energetyczne ucznia gimnazjum w wieku 13–15 lat

ROZKŁAD POSIŁKÓW W CIĄGU DNIA
Dobowe zapotrzebowanie organizmu = 100%

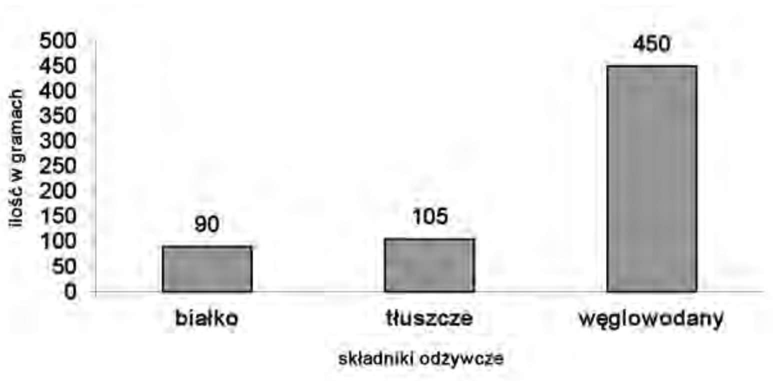
5 posiłków w ciągu dnia:

Lp.	Posiłek	Procent dobowego zapotrzebowania na energię
1	Śniadanie	25%
2	II śniadanie	15%
3	Obiad	35%
4	Podwieczorek	10%
5	Kolacja	15%

ZALECANE DZIENNE NORMY ZAPOTRZEBOWANIA NA ENERGIĘ

Lp.	Grupa ludności	Energia [kcal]
1	Dzieci w wieku 10–12 lat	2100
2	Chłopcy w wieku 13–15 lat	2800
3	Dziewczęta w wieku 13–15 lat	2600

DZIENNE ZAPOTRZEBOWANIE NA WAŻNIEJSZE SKŁADNIKI ODŻYWCZE MŁODZIEŻY W WIEKU 13–15 LAT



Załącznik nr 2: Spis potraw i ich wartości kaloryczne

Produkt		Ilość	Kcal
Pieczywo	Bułka pszenna	1 sztuka	125
	Chleb zwykły	1 kromka	102
	Chleb Gracham	1 kromka	84
	Chleb pszenny	1 kromka	96
	Chleb razowy	1 kromka	113
	Bułka paryska	1 kromka	45
	Kajzerka	1 sztuka	118
	Rogal	1 sztuka (60 g)	150
	Pieczywo tostowe pszenne	1 kromka	79
	płatki	100 g	351
	Pumpernikiel	1 kromka	101

Produkt		Ilość	Kcal
Nabiał	Jajko	1 sztuka	70
	Masło	1 łyżeczka	34
	Śmietana	1 łyżka	15
	Twarożek chudy	200 g	200
	Ser Brie	1 plasterek	45
	Ser topiony	1 porcja (25 g)	75
	Ser typu Feta	1 plasterek	43
	Ser żólty Gouda	1 plasterek	46
	Mleko 3,2%	1 szklanka	155
	Mleko 2%	1 szklanka	130
	Mleko 1,5%	1 szklanka	120
	Mleko 0,5%	1 szklanka	100
	Jogurt naturalny	1 szklanka	150
Napoje	Kakao	1 szklanka	140
	Herbata z cukrem i cytryną	1 szklanka	44
	Kawa z mlekiem	1 szklanka	45
	Sok pomarańczowy	1 szklanka	264
	Sok pomidorowy	1 szklanka	33
	Coca-cola	1 porcja (0,33 l)	142
	Fanta	1 porcja (0,33 l)	138
Zupy	Barszcz czerwony	1 talerz	87
	Pomidorowa z ryżem	1 talerz	95
	Jarzynowa zabielana	1 talerz	120
	Rosół z makaronem	1 talerz	200
	Żurek krakowski	1 talerz	290
	Krupnik	1 talerz	280

Produkt		Ilość	Kcal
Wędliny, potrawy mięsne i rybne	Salami	1 plasterek	81
	Szynka wędzona	1 plasterek	100
	Szynka drobiowa	1 plasterek	25
	Polędwica sopocka	1 plasterek	33
	Mortadela	1 plasterek	31
	Kiełbasa krakowska sucha	1 plasterek	32
	Parówki	1 sztuka	130
	Kotlet schabowy	1 porcja	475
	Pieczeń wołowa	1 porcja	284
	Wołowina gotowana	1 porcja	326
	Udka kurczaka gotowane	1 porcja	204
	Sznycel cielęcy po wiedeńsku	1 porcja	330
	Wątróbka smażona	1 porcja	175
	Kurczak w potrawce	1 porcja	375
	Kurczak pieczony na rożnie	1 porcja	310
	Szaszłyk z kaczki	1 porcja	810
	Filet z mintaja	1 porcja	140
	Kotleciki rybne	1 porcja	265
Potrawy jarskie	Omlet naturalny	1 porcja	200
	Jajecznica	1 porcja	130
	Fasolka po bretońsku	1 porcja	650
	Naleśniki z serem i owocami	1 porcja	490
	Pizza	1 porcja	340
	Zapiekanka z pieczarek	1 porcja	400
	Placki ziemniaczane	1 porcja	400
Sałatki, surówki, dodatki	Sałata zielona	1 porcja	125
	Surówka z papryki i pomidorów	1 porcja	70
	Mizeria	1 porcja	60
	Surówka z selera	1 porcja	220
	Surówka z porów i pomarańczy	1 porcja	105
	Bukiet z warzyw	1 porcja	270
	Ziemniaki gotowane	1 porcja	215
	Frytki	1 porcja	215
	Ryż gotowany	1 porcja	210

Produkt		Ilość	Kcal
Owoce	Jabłko	1 sztuka	70
	Gruszka	1 sztuka	110
	Banan	1 sztuka	144
	Brzoskwinia	1 sztuka	47
	Morela	1 sztuka	20
	Kiwi	1 sztuka	37
	Grejpfrut	1 sztuka	70
	Pomarańcza	1 sztuka	93
	Truskawki	10 sztuk	35
	Wiśnie	17 sztuk	56
	Winogrona	15 sztuk	73
	Śliwki węgierki	5 sztuk	65
	Arbuz	1 porcja	62
Warzywa	Pomidor	1 sztuka	28
	Marchew	1 sztuka	13
	Ogórek	1 sztuka	16
	Rzodkiewka	10 sztuk	20
	Papryka czerwona	1 sztuka	36
Desery	Budyń czekoladowy	1 porcja	335
	Galaretka z owocami	1 porcja	145
	Jabłka zapiekane	1 porcja	245
	Słone paluszki	1 paczka (100 g)	388
	Chałwa	1 porcja (50 g)	265
	Baton Mars	1 sztuka (70 g)	455
	Czekolada mleczna	1 tabliczka (100 g)	554
	Cukierki czekoladowe	2 sztuki	106
	Herbatniki	1 sztuka	40
	Popcorn	1 szklanka	146
	Chipsy paprykowe	1 torebka (50 g)	277
	Lody z sosem czekoladowym	1 porcja	355
	Pączek	1 sztuka (60 g)	226
	Eklerka	1 sztuka (70 g)	213
	Tort czekoladowy	1 porcja	615
	Keks z bakaliami	1 porcja	112
	Babka drożdżowa	1 porcja	285
	Makowiec	1 porcja	140
	Sernik biszkoptowy	100 g	310

21. Temat lekcji: Czy 20 000 zł wystarczy na urządzenie kuchni o wymiarach 4×5 m?

Na podstawie pracy Moniki Brodzińskiej oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: działania na liczbach, jednostki miary, zamiana jednostek, skala, plan.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
   4) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb;
   7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (…).

10. Figury płaskie. Uczeń:
   9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów;
   11) oblicza wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Dzięki tym praktycznym zajęciom uczniowie mogą się przekonać, że matematyka ma zastosowanie w życiu codziennym. Obliczenia, które wykonują uwzględniają przeliczanie jednostek i obliczenie kosztów. Eksperyment mógłby stanowić projekt gimnazjalny, jeśli uczniowie samodzielnie poszukiwaliby cen odpowiednich usług i produktów.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy 20 000 zł wystarczy na urządzenie kuchni o wymiarach 4×5 m?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Tak, tyle pieniędzy wystarczy, o ile nie uwzględnia się robocizny.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu
Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Wysokość kosztów poniesionych przy urządzaniu i remoncie kuchni.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Wymiarów kuchni.

Instrukcja do doświadczenia
Uczniowie zadali pytanie: „Czy 20 000 zł wystarczy na urządzenie kuchni o wymiarach 4×5 m?”. Postanowili, że w swojej pracy nie będą uwzględniać kosztów usług, twierdząc, że wszelkie prace właściciele wykonają we własnym zakresie. Przygotowali plan pomieszczenia w skali 1:20, zaprojektowali również w specjalnym programie komputerowym układ mebli w danej kuchni (oczywiście uwzględniając odpowiednie wymiary). Podali dane kolegom i dzięki temu wiadomo było, ile i jakie rodzaje materiałów są potrzebne. Podczas zajęć uczniowie, sporządzając kosztorys, korzystają z Internetu, wyszukują informacje na temat cen płytek, farb, mebli, urządzeń AGD itp.

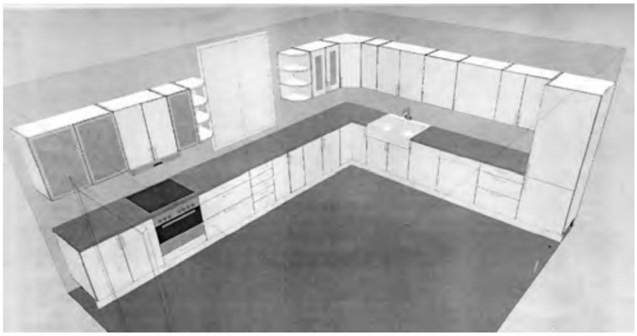
Artykuły budowlane	Ilość	Cena	Razem
Płytki podłogowe Gres Real Stone „Karmin”	20 m^2	1 m^2 = 55,80 zł	
Farba Dulux Kremowy	45 m^2	1 op. = 14 m^2 = 67 zł	
Artykuły AGD			
Lodówka Mastercook LT -614Plus	1	899 zł	
Kuchenka elektryczna + płyta indukcyjna Mastercook	1	1399 zł	
Okap Euro Akom	1	599 zł	
Zmywarka Euro Bosch	1	1449 zł	
Zlewozmywak Bolhmen	1	364,99 zł	
Bateria ESSCIK	1	129,99 zł	
Inne artykuły			
Okno 116 x 146	1	1500 zł	
Żyrandol	1	256 zł	
Drzwi wewnętrzne	1	262 zł	
Grzejnik C.O. ze stali (o mocy grzewczej 881W)	1	134,88 zł	

Artykuły budowlane	Ilość	Cena	Razem
		Meble	
Stół kuchenny „Adaś	1	324 zł	
Krzesła kuchenne „Benny	2	105 zł	
Szafka	1	730 zł	
Szafka	1	640 zł	
Szafka	2	255 zł	
Szafka	2	325 zł	
Szafka	1	515 zł	
Szafka	2	195 zł	
Szafka	1	615 zł	
Szafka	1	135 zł	
Szafka	2	149,95 zł	
Szafka	1	500 zł	
Szafka	1	150 zł	
Szafka	1	305 zł	
Szafka	1	230 zł	
Szafka	2	275 zł	
Uchwyty do szafek	16	14,99 zł	
Blat 246×62	1	399,95 zł	
Blat 126×62	5	199,95 zł	
Cokół	3	40 zł	
Wkręt	28	15 zł	
		Łączny koszt remontu:	

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Obliczenia uczniowskie.

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Oblicz koszt remontu łazienki o wymiarach 2×3 m, uwzględniając koszty usług.

Wybrane załączniki:
Zdjęcie projektu kuchni



22. Temat lekcji: Kulki w szklance i pierwsza kropla wody

Na podstawie pracy Wiesławy Szurnickiej oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: walec, kula, liczba Pi, objętość walca, objętość kuli.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
   3) zamienia ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe), zamienia ułamki dziesiętne skończone na ułamki zwykłe;
   4) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb;
   5) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających ułamki zwykłe i dziesiętne.
3. Potęgi. Uczeń:
   1) oblicza potęgi liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych.

11. Bryły. Uczeń:
    2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).

Rekomendacja ekspertki CEO:
Bardzo ciekawe doświadczenie, pomaga w rozwiązywaniu zadań testowych, z którymi uczniowie mają problemy. Efekt Eureki gwarantowany.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Ile kulek należy wrzucić do szklanki, aby woda zaczęła się przelewać?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Pierwsza kropla wody przeleje sie po wrzuceniu 9 kulek.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Doświadczenie polega na wrzucaniu szklanych kulek tej samej wielkości do szklanki (w kształcie walca) wypełnionej wodą w 3/4 objętości. Zadaniem uczniów było odgadnięcie, ile kulek należy wrzucić, aby ze szklanki wylała się pierwsza kropla wody.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Liczbę kulek w szklance.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Poziom wody w szklance.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Rodzaju i wielkości kulek i szklanki.

Instrukcja do doświadczenia:
1. Wrzucajcie kulki do szklanki do momentu, aż pierwsza kropla wody wyleje się ze szklanki.
2. Policzcie, ile kulek zostało wrzuconych.
3. Sprawdźcie, czy wynik doświadczenia jest zgodny z hipotezą.
4. Zmierzcie odpowiednie odcinki i obliczcie objętość całej szklanki. Do obliczeń możecie używać kalkulatora.
5. Wykonując odpowiednie obliczenia, sprawdźcie, ile wynosi objętość wody w szklance.
6. Zmierzcie odpowiednie odcinki i obliczcie objętość jednej kulki.
7. Obliczcie, jaką objętość mają wszystkie kulki wrzucone przez Was do szklanki.
8. Co zauważyliście?

23. Temat lekcji: Jaka odległość dzieli moje miasto Miłomłyn od wielkich miast Polski?

Na podstawie pracy Małgorzaty Joniec oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: skala mapy, odległość między miastami.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).
2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie). Uczeń:
   3) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Praktyczny pomysł na połączenie matematyki, geografii i umiejętności potrzebnej w życiu codziennym. Dla uczniów wskazówka, w jaki sposób samodzielnie mogą obliczyć trasę. Bardzo prosty pomysł, ale za to do wykonania w każdej klasie.

Źródło:
Podobne zadania wykonywała autorka pomysłu w dzieciństwie. Jej ojciec był kierowcą i musiała na podstawie mapy obliczać mu długość trasy, jaką miał do przejechania.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Jaka odległość dzieli moje miasto Miłomłyn od wielkich miast Polski?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Odległość z Miłomłyna do Gdańska wynosi około 130 km (hipoteza została potwierdzona z dokładnością do 5 km!).

OPIS DOŚWIADCZENIA

Uczniowie znajdują na mapie najkrótszą trasę, którą można przejechać z Miłomłyna do wybranego miasta Polski. Każda grupa wykonuje doświadczenie z innym wybranym przez siebie miastem.

Następnie długość trasy mierzą za pomocą sznurka. Mierzą otrzymaną długość sznurka i uwzględniając skalę mapy, wykonują obliczenia zamieniając jednostki.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Miasta, do których odległość mierzymy.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Liczbę kilometrów między miastami.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Trasy między Miłomłynem a wybranym miastem Polski, mapy o danej skali.

Instrukcja do doświadczenia:
Materiały: mapa, sznurek, nożyczki, linijka lub miara krawiecka, karty do obliczeń.

Wykonanie:
- Uczniowie znajdują na mapie najkrótszą trasę, którą można przejechać z Miłomłyna do wybranego miasta Polski.
- Mierzą długość sznurka rozpiętego na mapie na trasie pomiędzy miastami (im dokładniej ułożą sznurek na trasie, tym dokładniejsze będą pomiary).
- Uwzględniając skalę mapy oraz zamieniając jednostki, wykonują obliczenia rzeczywistej długości trasy.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Obliczenia uczniowskie.

Oto przykładowe obliczenia z jednej z grup:

Sznurek długości 13,5 cm.
Skala mapy – 1:1 000 000
1 cm = 10 km
13,5 cm × 1 000 000 = 135 cm ×100 000=13 500 000 cm = 135 000 m = 135 km

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Można w tym doświadczeniu, zamiast mierzyć i liczyć odległość między dwoma miastami na podstawie mapy Polski, zmierzyć i policzyć wybrane odległości na terenie miasta, w którym mieszkają uczniowie.

Grupy mogą używać różnych map i obserwować różnice w wynikach obliczeń.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Prawidłowo wykonane doświadczanie powinno pokazać, jak w prosty sposób można obliczyć odległość pomiędzy miastami i jak posługiwać się skalą.

Wybrane załączniki:
Zdjęcie wykonane podczas przeprowadzania doświadczenia

24. Temat lekcji: Czy da się odciąć 1/2 m wstążki, która ma długość 2/3 m, nie używając przyrządów służących do mierzenia?

Na podstawie pracy Hanny Wróblewskiej oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: ułamek zwykły, rozwinięcie dziesiętne ułamka zwykłego, długość odcinka, jednostki długości.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
   7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).

Rekomendacja ekspertki CEO:
Ciekawe praktyczne zadanie. Ćwiczy i uzasadnia potrzebę rachowania na ułamkach. Sugerowane modyfikacje dają możliwości różnych wariantów w zależności od zdolności uczniów.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy da się odciąć 1/2 m wstążki, która ma długość 2/3 m, nie używając przyrządów służących do mierzenia?

Przykładowa hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Tak, bo inaczej nie przeprowadzilibyśmy doświadczenia.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Uczniowie mają ustalić, czy da się odciąć 1/2 m wstążki, która ma długość 2/3 m, nie używając przyrządów służących do mierzenia. Uczniowie otrzymuję wstążkę o długości 2/3 m i ustalają hipotezę. Sprawdzają hipotezę, dzieląc wstążkę na dwie równe części i obliczają długość każdej z dwóch części. Następnie składają jeszcze raz na pół i obliczają długość każdej z czterech części. Obliczają również, jaką długość mają trzy części wstążki.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Liczbę równych części wstążki.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Długość części wstążki.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Długości wstążki.

Instrukcja do doświadczenia:
– Weź wstążkę o długości 2/3 m i złóż ją równo na pół.
– Oblicz, jaką długość ma każda z dwóch części.

– Jeszcze raz złóż wstążkę na pół.
– Oblicz, jaką długość ma każda z czterech części.
– Oblicz, jaką długość mają trzy części wstążki.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:

$$\frac{2}{3}:2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}[\boldsymbol{m}]$$

$$\frac{1}{3}:2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}[\boldsymbol{m}]$$

$$3\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{m}]$$

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Można najpierw podać informację, że zadanie jest możliwe do rozwiązania poprzez składanie wstążki, ale nie sugerować uczniom, ile razy i w jaki sposób.

Można też zastanawiać się, czy w podobny sposób można otrzymać inne długości?

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcą powtórzyć doświadczenie:
Prawidłowo wykonane doświadczanie powinno pokazać, że można zastosować ułamki praktycznie.

25. Temat lekcji: Ile kosztuje założenie ogrodu?

Na podstawie pracy Katarzyny Kulbackiej oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: pola i obwody wielokątów, skala, plan, jednostki powierzchni.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:

    7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).

10. Figury płaskie. Uczeń:
    9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów;
    10) zamienia jednostki pola.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Pomysł na doświadczenie osadzony jest w kontekście praktycznym, co sprawia, że matematyka staje się pożyteczna, bardziej ciekawa i nie tak abstrakcyjna. Ponadto uczniowie, jako przedstawiciele firmy, mogą poczuć się docenieni i dowartościowani, szczególnie Ci, którzy mają na co dzień problemy z matematyką.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Ile kosztuje założenie ogrodu?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
1900 zł.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Uczniowie pracują w grupach. Każda grupa to firma projektująca ogrody. Otrzymują zlecenie od klienta, w którym są podane wymiary działki, położenie i wymiary domu, warunki, które ma spełniać ogród. Otrzymują również cennik i instrukcję, jak sadzić poszczególne rośliny. Mają za zadanie oszacować, ile kosztuje założenie takiego ogrodu, a następnie zaprojektować ogród, narysować jego plan w skali 1:100 i policzyć koszty.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Projekt ogrodu.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Wysokość kosztów poniesionych przy zakładaniu ogrodu.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Wymiarów ogrodu.

Instrukcja do doświadczenia:
Uczniowie zostają podzieleni na grupy, każda grupa to firma zajmująca się projektowaniem ogrodów otrzymująca zlecenie od klienta.

Zadaniem jest zaprojektowanie ogrodu o podanych wymiarach z uwzględnieniem położenia domu.

Ogród ma spełniać określone warunki: co najmniej 3 różane klomby, rabaty kwiatowe, których brzegi obsadzone będą bukszpanem, kamienna ścieżka z domu do ogrodzenia, pozostała część obsiana trawą. Każda grupa otrzymuje cennik materiałów oraz instrukcje, jak sadzić poszczególne rośliny. Uczniowie mają za zadanie wykonać plan w skali 1:100 i obliczyć koszty założenia ogrodu.

Zlecenie
Masz działkę w kształcie kwadratu o powierzchni 9 arów.
Jest już ogrodzona.
Dom na tej działce znajduje się w lewym górnym rogu i jest zbudowany na planie prostokąta o wymiarach 12×10 m, odsunięty 4 m od ogrodzenia.
Zaprojektuj ogród na tej działce tak, aby spełniał warunki:
– różane klomby niezachodzące na siebie (co najmniej 3),
– rabaty kwiatowe z kwiatów jednorocznych, których brzegi obsadzone będą bukszpanem,
– pozostała część działki ma być obsadzona trawą,
– powinna być kamienna ścieżka z domu do ogrodzenia,
– może (nie musi) być oczko wodne,
– róże sadzimy 1szt. na 0,5 m²,
– bukszpan co 20 cm,
– ścieżka może mieć szerokość co najwyżej 50 cm.

Cennik:
1 sadzonka bukszpanu kosztuje 2 zł.
1 sadzonka róży kosztuje 5 zł.
100 m² trawy kosztuje 80 zł.
Nasiona kwiatów są w cenie 1,50 zł za opakowanie (opakowanie wystarcza na 2 m²).
1 m² kostki brukowej kosztuje 90 zł,
Oczko wodne to 700 zł za 12 m².

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Obliczenia uczniowskie.
Oto przykładowe obliczenia z jednego z projektów:
Rabaty: 9×9 m = 81 m^2
$81 \div 2 = 40{,}5$
$41 \times 1{,}50$ zł = 61,50
Bukszpan: 9 m^2 : 0,2 = 45
$45 \times 4 = 180$
180×2 zł = 360 zł
Klomb różany: 5×5 m = 25 m^2
25 m^2 $\times$ 3 = 75 m^2
$75 \div 0{,}5 = 150$
150×5 zł = 750 zł
Dróżka: $0{,}5 \times 4$ m = 2 m^2
2×90 zł = 180 zł
Dom: 12×10 m = 120 m^2
Oczko: 2×10 m = 20 m^2
$20 \times 700 \div 12$ = 116,70 zł
Trawa: 900 m^2 – 81 m^2 – 75 m^2 – 2 m^2 – 120 m^2 – 20 m^2 = 602 m^2
7×80 zł = 560 zł
Suma kosztów: 61,50 + 360 + 750 + 180 + 560 + 116,70 = 2028,20 zł

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Można dać uczniom po wykonaniu obliczeń możliwość wyboru firmy lub wzajemnego sprawdzenia obliczeń. Można również przeanalizować oferty nie tylko pod względem ceny, czyli opracować kryteria oceny projektów.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Prawidłowo wykonane doświadczanie powinno pokazać, że projektowanie, zamawianie projektu i jego wybór jest sztuką, którą trzeba zaplanować.

26. Temat lekcji: Przepisy na drodze

Na podstawie pracy Danuty Wódczak oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: zależność między drogą, czasem i prędkością; jednostki czasu, prędkości i drogi oraz ich zamiana; procent liczby.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
   4) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb;
   7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).
5. Procenty. Uczeń:
   1) przedstawia część pewnej wielkości jako procent lub promil tej wielkości i odwrotnie.
6. Wyrażenia algebraiczne:
   7) wyznacza wskazaną wielkość z podanych wzorów, w tym geometrycznych i fizycznych.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Jaki procent kierowców, którzy przejeżdżają koło naszej szkoły, przestrzega przepisów drogowych?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
40% (uwaga: hipoteza okazała się błędna, żaden kierowca nie jechał prawidłowo!).

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Rodzaje samochodów.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Czas przejazdu.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Określonego odcinka drogi (200 m).

Instrukcja do doświadczenia;
Zadaniem każdego ucznia było zmierzenie za pomocą stopera czasu przejazdu samochodów na odcinku 200 metrów (teren przed wejściem do szkoły), zapisanie wyników w karcie obserwacji, a następnie należało obliczyć, z jaką prędkością jeżdżą auta. Celem obserwacji było określenie, jaki procent kierowców stosuje się do przepisów ruchu drogowego i porusza się na tej drodze z prędkością do 40 km/h.

BHP:
Obserwacja pod opieką osoby dorosłej.

27. Temat lekcji: Matematyczna kostka do gry

Na podstawie pracy Agnieszki Reymont-Kosiek oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Barbara Uniwersał

Podstawowe pojęcia: rachunek prawdopodobieństwa, statystyka opisowa, procent, diagram procentowy.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   3) zamienia ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe), zamienia ułamki dziesiętne skończone na ułamki zwykłe;
   4) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb.

5. Procenty. Uczeń:
   1) przedstawia część pewnej wielkości jako procent lub promil tej wielkości i odwrotnie.
9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń:
   1) interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów;
   3) przedstawia dane (…) za pomocą diagramu (…) kołowego;
   5) analizuje proste doświadczenia losowe (np. rzut kostką, rzut monetą, wyciąganie losu) i określa prawdopodobieństwa najprostszych zdarzeń w tych doświadczeniach (prawdopodobieństwo wypadnięcia orła w rzucie monetą, dwójki lub szóstki w rzucie kostką itp.).

Rekomendacja ekspertki CEO:
Propozycja interesująca dla ucznia – w wielu grach planszowych grę rozpoczyna osoba, która wyrzuci szóstkę – nieuchronne są więc pytania: „Dlaczego akurat szóstka?" – „Może ona wypada najrzadziej…?". Realizując takie doświadczenie, warto powiedzieć uczniom, iż na razie opieramy się na empirii, w dalszych latach nauki (liceum) poznają aparat matematyczny pozwalający to uzasadnić.

Ważne jest też połączenie elementów rachunku prawdopodobieństwa i statystyki opisowej z procentami i diagramami procentowymi – widać tu ich zastosowanie. Doświadczenie nadaje się też idealnie do wykorzystania TIK w nauczaniu.

Źródło:
- http://statystyka.tangens.pl/57,Do%C5%9Bwiadczenia_losowe.html (18.10.2011);
- http://matematyka.pisz.pl/strona/1017.html (18.10.2011);
- Podręcznik do matematyki (kl. 1), *Matematyka z plusem*: diagramy procentowe, s. 57–61.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy szóstka w rzucie kostką wypada najrzadziej?

Przykładowe hipotezy zaproponowane przez uczniów:
Tak, jest to mało prawdopodobne.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Liczbę rzutów.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Liczbę wyrzuconych oczek.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Kostki (symetryczna, sześcienna).

Instrukcja do doświadczenia:
Pracujemy w parach – wykonujemy rzuty kostką sześcienną w celu określenia możliwych wyników doświadczenia losowego. Na podstawie doświadczenia sprawdzimy, czy liczba wyrzuconych „szóstek" jest taka sama/zbliżona do liczby wyrzuconych „jedynek", „piątek",… itd.

Do doświadczenia potrzebne nam będą sześcienne kostki – jedna na parę, a także formularz z tabelą do notowania wyników.

Aby właściwie ocenić „szanse" wyrzucenia tej samej liczby różnych wyników, trzeba określić liczbę rzutów (zdarzeń elementarnych).

Po zebraniu wyników naszego doświadczenia spróbujemy określić, jaką częścią (jakim procentem) wszystkich uzyskanych wyników są „szóstki", jaką „piątki" itd.

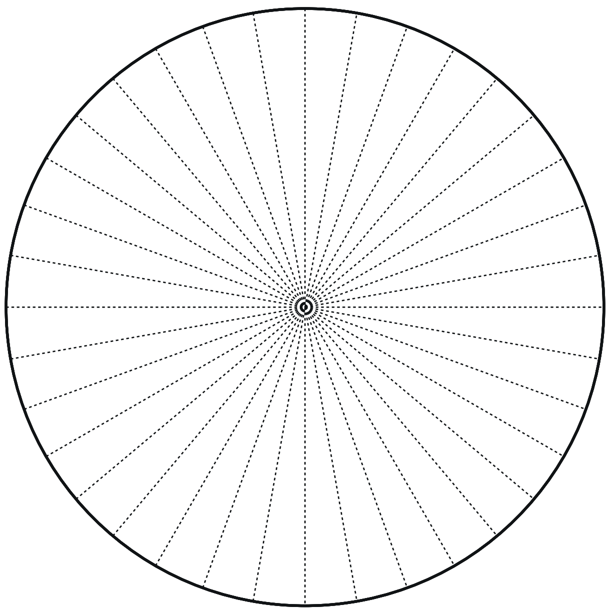
Wyniki doświadczenia (podane procentowo) przedstawimy graficznie na diagramach kołowych (różnych dla różnej liczby rzutów). Potrzebne będą więc także kolorowe kredki do zaznaczania poszczególnych obszarów diagramu.

Po wykonaniu zadania porównamy diagramy wszystkich grup, aby sformułować wnioski do doświadczenia.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Tabela wyników doświadczenia

Liczba rzutów	6 „oczek”	5 „oczek”	4 „oczka”	3 „oczka”	2 „oczka”	1 „oczko”
Jaka to część wszystkich rzutów (jaki procent)?						
Jaka to część wszystkich rzutów (jaki procent)?						
Jaka to część wszystkich rzutów (jaki procent)?						

Diagramy przedstawiające wyniki doświadczenia dla ….. rzutów.



Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Warto pracować z większą liczbą kostek – na przykład 5 czy 10 na parę – pozwoli to w krótkim czasie uzyskać dużą liczbę wyników, co uczyni doświadczenie ciekawszym dla uczniów i lepiej odda jego ideę. Zdecydowanie łatwiejsze będzie

zastosowanie diagramów słupkowych (to może być istotne ze względu na czas, jaki mamy do dyspozycji na zajęciach). Warto więc wykorzystać TIK i po wykonaniu rzutów pracować z arkuszem Excel.

Ksawery Stojda proponuje:
Warto też zrobić takie wykresy dla różnych liczebności prób (dla 30 rzutów, 100, 300, 500...) i porównać je między sobą.

Na gimnazjalnym poziomie nie udowodni się tego matematycznie, ale można i warto, żeby uczniowie zauważyli prawidłowość, zwaną popularnie „prawem wielkich liczb" – im większa liczba rzutów kostką, tym bliższe sobie są odsetki rzutów, w których wypadło sześć i jedno oczko. Warto, by wyrobili sobie intuicję tej zależności – choćby stojąca za nią matematyka była im niedostępna: więcej prób – średni wynik bardziej przewidywalny!

Można zrobić wykres rozbieżności wyniku (np. różnicy pomiędzy odsetkiem orzełków a reszek, jedynek a szóstek) od liczby prób i zobaczyć, jak to maleje.

Przy pewnym nakładzie czasu (kilkanaście różnych liczebności prób) i dociekliwości uczniów, można nawet pokusić się o odkrycie tej zależności: że różnice pomiędzy odsetkami jedynek i szóstek maleją wraz z pierwiastkiem z liczby prób.

28. Temat lekcji: Matematyka a podróż Arkadego Fiedlera

Na podstawie pracy Marzanny Boć-Ochyry oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: skala, zamiana jednostek długości.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
II etap edukacyjny: klasy IV–VI
12. Obliczenia praktyczne. Uczeń:
   6) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki długości: metr, centymetr decymetr, milimetr, kilometr;

8) oblicza rzeczywistą długość odcinka, gdy dana jest jego długość w skali oraz długość odcinka w skali, gdy dana jest jego rzeczywista długość.

III etap edukacyjny. Matematyka

1. Liczby wymierne dodatnie: Uczeń:
   7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).
10. Figury płaskie. Uczeń:
   11) oblicza wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali.

III. etap edukacyjny. Geografia

1. Mapa – umiejętność czytania, interpretacji i posługiwania się mapą. Uczeń:
   1) wykazuje znaczenie skali mapy w przedstawianiu różnych informacji geograficznych na mapie; posługuje się skalą mapy do obliczania odległości w terenie.

Rekomendacja eksperta CEO:
Od ucznia oczekujemy pomysłowości i staranności. Dzięki zastosowaniu map o różnej skali i pracy różnymi metodami badawczymi mamy szansę na ciekawą dyskusję dotyczącą wpływu na otrzymany wynik takich czynników jak skala, staranność pomiaru, liczba odcinków przybliżających, wybór metody badawczej.

Doświadczenie warto przeprowadzić nawet osobno, w minimum trzech wersjach i dwóch kategoriach:
- wybrać jako zmienną niezależną sposób określania długości (liczby odcinków przybliżających nie zmieniamy),
- wybrać jako zmienną niezależną skalę mapy i sprawdzać, jak to wpłynie na wynik w każdej metodzie,
- w metodzie przybliżającej trasę odcinkami wybrać jako zmienną niezależną liczbę odcinków (skala = const).

Doświadczenie w nieschematyczny sposób pozwala zastosować wiedzę o skali mapy i sprawdzić umiejętność przeliczania jednostek długości.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Ile kilometrów przebył podróżnik Arkady Fidler w trakcie swych podróży?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
65 000 km.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Skala.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Długość sznurka (lub sumę długości odcinków, na które podzielono trasę).

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Trasy, którą przebył Arkady Fiedler.

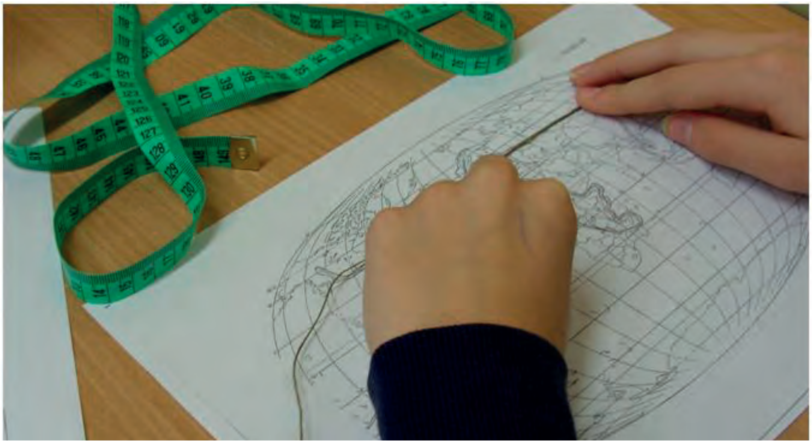
Instrukcja do doświadczenia:
Uczniowie otrzymują mapę z narysowaną trasą podróży Arkady Fidlera oraz daną skalą. Każda grupa pracuje z mapą o innej skali. Zadaniem jest wymyślenie sposobu na obliczenie długości trasy i porównanie swych obliczeń z faktycznym rezultatem. Do dyspozycji mają przymiar krawiecki, linijkę, sznurek.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Uczniowie zaproponowali dwie ciekawe metody obliczania długości trasy:
- Przypasować do linii wyrysowanej trasy sznurek, zmierzyć jego długość i pomnożyć przez skalę mapy, a następnie przeliczyć jednostki.
- Podzielić trasę na małe odcinki o charakterystyce liniowej, pomierzyć długości tych odcinków, dodać je i otrzymaną sumę pomnożyć przez skalę mapy, a następnie przeliczyć jednostki.

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Zestaw doświadczalny bardzo sugeruje sposób wykonania doświadczenia. Dlatego pomysł podziału trasy na małe, w przybliżeniu liniowe, odcinki jest bardzo cenny. Proponuję do zestawu dodać wiele innych narzędzi, by sugestia dotycząca sznurka nie była oczywista (np. zamiast sznurka dać długą nitkę nawleczoną na igłę w makatce do wyszywania jakiegoś konturu, grafoskop, nożyczki itd.). Możliwe jest także poszukiwanie innych sposobów określenia długości trasy.

Prawidłowo wykonane doświadczanie powinno:
- być oparte na poprawnym metodologicznie sposobie szacowania długości trasy; dwie metody zaproponowane przez uczniów są tu godne polecenia;
- nauczyć uczniów prawidłowo przeliczać wymiary uzyskane z mapy na wartości „rzeczywiste”, tzn. z uwzględnieniem skali mapy;
- zawierać poprawne przeliczenie jednostek długości.

Wybrane załączniki:
Zdjęcie wykonane podczas przeprowadzania eksperymentu



29. Temat lekcji: Rozwinięcie ułamka dziesiętnego

Na podstawie pracy Anity Bałdys oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Barbara Uniwersał

Podstawowe pojęcia: licznik ułamka zwykłego, mianownik ułamka zwykłego, rozwinięcie dziesiętne ułamka zwykłego, ułamek okresowy.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   3) zamienia ułamki zwykłe na dziesiętne (także okresowe) (…).

Rekomendacja ekspertki CEO:
Proste doświadczenie pokazujące jak zaplanować zmienność prowadzącą do prawidłowości. Zaletą jest też jasność i łatwość określenia zmiennych.

Źródło:
Matematyka z plusem 1. Podręcznik do gimnazjum, wyd. Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2008.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Co ułamek zwykły może nam powiedzieć o rozwinięciu dziesiętnym ułamka?

Przykładowe hipotezy zaproponowane przez uczniów:
W okresie rozwinięcia dziesiętnego jest tyle cyfr, ile w liczniku.

Ta cyfra, która jest w liczniku, mówi nam, ile będzie cyfr w rozwinięciu dziesiętnym.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Licznik ułamka zwykłego.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Rozwinięcie dziesiętne okresowe.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Mianownika ułamka zwykłego.

Instrukcja do doświadczenia:
Dzielimy uczniów na dwuosobowe grupy, każda grupa otrzymuje karty pracy z trzema ułamkami zwykłymi. Na kartach pracy są trzy ułamki z jedną dziewiątką w mianowniku albo trzy ułamki z dwoma dziewiątkami w mianowniku, albo z trzema dziewiątkami w mianowniku. Każda grupa zapisuje na kartach pracy rozwinięcia dziesiętne swoich ułamków (oblicza na kalkulatorze), zapisuje je w postaci ułamków okresowych i zastanawia się nad zależnością, jaka zachodzi pomiędzy postacią ułamka zwykłego a cyframi w okresie. Następnie zapisujemy wszystkie ułamki zwykłe oraz ich postać okresową na tablicy i wspólnie formułujemy odpowiedź na nasze pytanie.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:

$\frac{2}{9} = 0{,}222\ldots = 0{,}(2)$

$\frac{4}{9} = 0{,}444\ldots = 0{,}(4)$

$\frac{7}{9} = 0{,}777\ldots = 0{,}(7)$

$\frac{3}{9} = 0{,}333\ldots = 0{,}(3)$

$\frac{5}{9} = 0{,}555\ldots = 0{,}(5)$

$\frac{8}{9} = 0{,}888\ldots = 0{,}(8)$

$\frac{4}{99} = 0{,}040404\ldots = 0{,}(04)$

$\frac{7}{99} = 0{,}070707\ldots = 0{,}(07)$

$\frac{12}{99} = 0{,}121212\ldots = 0{,}(12)$

$\frac{5}{99} = 0{,}050505\ldots = 0{,}(05)$

$\frac{35}{99} = 0{,}353535\ldots = 0{,}(35)$

$\frac{78}{99} = 0{,}787878\ldots = 0{,}(78)$

$\frac{129}{999} = 0{,}129129129\ldots = 0{,}(129)$

$\frac{2}{999} = 0{,}002002002\ldots = 0{,}(002)$

$\frac{43}{999} = 0{,}043043043\ldots = 0{,}(043)$

$\frac{353}{999} = 0{,}353353353\ldots = 0{,}(353)$

$\frac{7}{999} = 0{,}007007007\ldots = 0{,}(007)$

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Przygotowując doświadczenie, warto tak dobrać liczniki, aby miały różną liczbę cyfr, nie zawsze tyle samo, ile jest dziewiątek w mianowniku.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Komentarz ekspertki CEO:
Efektem uczniowskiej obserwacji jest wytworzenie przeświadczenia graniczącego z wewnętrzną pewnością, że potrafią już określać rozwinięcia dziesiętne ułamków o mianownikach zbudowanych z dziewiątek. Dość trudnym, ale ważnym metodycznie zadaniem dla nauczyciela jest odwiedzenie uczniów od przekonania, że to, co intuicyjnie jasne – oznacza matematycznie pewne. Chodzi bowiem o to, by nie wyciągnęli wniosków, że oto udowodnili pewną regułę poprzez analizę skończonej liczby obserwacji. Nie można zakończyć w ten sposób rozwiązywania zagadnienia.

Nie jest wszak prostym zadaniem wytworzenie potrzeby na ścisły matematyczny dowód, który jednakowoż jest możliwy, na poziomie gimnazjalisty. Wystarczy odwrócić problem i poszukiwać ułamków zwykłych odpowiadających rozwinięciom dziesiętnym. Polecenie: „Wykaż, że 0,(23) = 23/99" bardzo przybliża do tego ideału. Zapewne uczniowie zaczną się trochę buntować, np. mówiąc: co tu wykazywać – wiemy, że tak jest. Wówczas jeszcze przed tym wykazaniem warto im zwrócić uwagę, że przecież istnieją ułamki zwykłe o mianownikach „odmiennych" niż zbudowane z samych dziewiątek, a wiemy, że ich rozwinięcie dziesiętne jest okresowe. Może więc warto wymyślić „sposób" dla każdego tego typu ułamka. Już przy pierwszym tego typu „dowodzie", np. w proponowanym powyżej przypadku, matematyczna przygoda wejdzie na tory kontynuacji. Może wówczas kolejnym przykładem będzie 1,2(3) = x?

30. Temat lekcji: Co lepsze – strategia czy przypadek? Gra dydaktyczna

Na podstawie pracy uczniów pod opieką Katarzyny Ciemińskiej. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Włodzimierz Gapski

Podstawowe pojęcia: liczby wymierne – własności, przybliżenia liczb, porównywanie liczb, działania na liczbach.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
   3) zamienia ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe), zamienia ułamki dziesiętne skończone na ułamki zwykłe;
   4) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb;
   5) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających ułamki zwykłe i dziesiętne;
   6) szacuje wartości wyrażeń arytmetycznych.

Rekomendacje eksperta CEO:

Tematem gry były niezbyt lubiane przez uczniów i mało dla nich atrakcyjne działania na liczbach (całkowitych, ułamkach zwykłych i dziesiętnych), porównywanie i zaokrąglenia liczb. Gra toczy się według opracowanych przez uczniów reguł. Przygotowanie przez nich 150 przykładów zadań do rozwiązania (*Załącznik nr 1*) wymagało dużego wysiłku i sprawnej organizacji pracy. Ciekawie też prezentuje się plansza do gry (*Załącznik nr 2*). Przygotowana przez uczniów propozycja zajęć okazała się na tyle ciekawa, że, w opinii nauczycielki nadzorującej przygotowanie zajęć uczniowie uczestniczący w lekcji *„utrwalili materiał i dzięki grze bardziej go polubili”*. Natomiast uczniowie, którzy przygotowali i przeprowadzili zajęcia *„doszli do wniosku, że warto jest stawiać sobie problemy do rozwiązania, bo można dowiedzieć się i nauczyć ciekawych rzeczy”*.

Nazwa i rodzaj gry:
„Liczby i znaki” – turniej wiedzy, gra planszowa.

OPIS GRY

Planowane korzyści z gry:
Powtórzenie wiadomości o liczbach wymiernych i działań na liczbach wymiernych.

Instrukcja gry
Zawartość:
150 kartek z pytaniami, 300 kartek (punktów), plansza do gry, pionki, kostka.

Reguły gry:
W grę może grać od 3 do 6 osób. Z graczy wybierany jest sędzia, który, zaopatrzony w kartkę i długopis, sprawdza wyniki i rozdaje punkty. Gra polega na jak najszybszym zdobyciu 50 punktów. Za jedno pytanie można zdobyć od 1 do 4 punktów. Wybierając pytanie, gracz mówi, za ile punktów odpowiada na to pytanie. Jeśli odpowie źle, oddaje połowę liczby punktów, o jaką grał (zaokrąglając do jedności).

Na przykład gracz odpowiada za 3 punkty. Jeśli odpowiedział źle, oddaje 2 punkty (ułamki zaokrągla się w górę). Gdy jeden z graczy zdobędzie 50 punktów lub więcej, gra kończy się i sędzia mówi, kto zajął które miejsce.

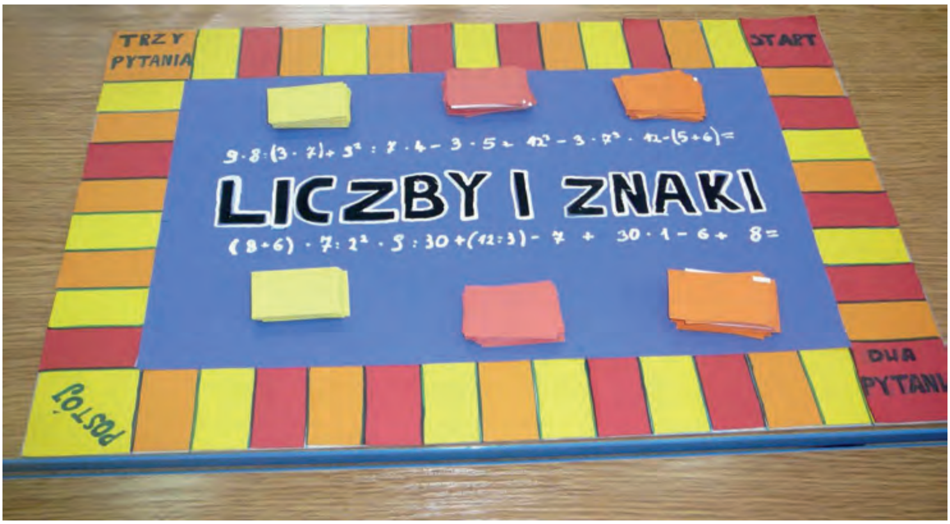
Opis strategii, jaką obrali uczniowie:
W opisie reguł gry możemy przeczytać, że uczeń – gracz wybierając pytanie mówi, za ile punktów odpowiada na to pytanie. Jest to ciekawa propozycja umożliwiająca przyjęcie odpowiedniej strategii na różnych etapach gry, w zależności od posiadanych punktów oraz liczby punktów zgromadzonych przez innych graczy. Uczy więc przemyślanego podejmowania decyzji.

Pomysł na modyfikację gry i uwagi eksperta CEO:
Aby wykorzystać planszę do gry, należy zmodyfikować reguły gry. Spowoduje to, że gra ze strategicznej stanie się grą losową. Zadania należy podzielić na 3 kategorie (za 1, 2 i 3 punkty), a następnie wydrukować je na kartkach w kolorach odpowiadających polom na planszy do gry. Gracz, wyrzucając kostką określoną liczbę oczek stawia swój pionek na odpowiednim polu i odpowiada na pytanie zapisane na kartce o tym samym kolorze. Udzielenie niepoprawnej odpowiedzi skutkuje utratą kolejki. Gra może toczyć się zarówno do momentu zdobycia przez pierwszego graczy określonej liczby punktów, jak i do chwili, gdy pierwszy uczeń, po przebyciu całej planszy, dotrze do punktu startu.

Warto zaproponować uczniom rozegranie gry w obu wersjach, a następnie zapytać, która z nich bardziej im odpowiada. Na koniec można przeprowadzić dyskusję na temat różnicy między grami strategicznymi i losowymi.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł: Podczas gry uczniowie utrwalają podstawowe pojęcia związane z liczbami wymiernymi, ćwiczą i doskonalą w atrakcyjny sposób umiejętności związane z zaokrąglaniem i porównywaniem liczb wymiernych, szacowaniem wartości prostych wyrażeń oraz działaniami na ułamkach dziesiętnych. Dobry sposób na powtórkę przed sprawdzianem.

Załączniki wybrane przez eksperta:
Załącznik 1. Plansza do gry



Załącznik 2. Zadania do rozwiązania

Zaokrąglij do dziesiątek: 184	Zaokrąglij do setek: 750	Zaokrąglij do tysięcy: 1513	Zaokrąglij do jedności: 9,81	Zaokrąglij do części dziesiętnych: 213,57
Zaokrąglij do dziesiątek: 2372	Zaokrąglij do setek: 53876	Zaokrąglij do tysięcy: 7099783	Zaokrąglij do jedności: 13,574	Zaokrąglij do części dziesiętnych: 17,952
Zaokrąglij do dziesiątek: 51	Zaokrąglij do setek: 234995	Zaokrąglij do tysięcy: 823	Zaokrąglij do jedności: 19,95	Zaokrąglij do części dziesiętnych: 9,118
Zaokrąglij do dziesiątek: 392	Zaokrąglij do setek: 407	Zaokrąglij do tysięcy: 12487	Zaokrąglij do jedności: 1,42	Zaokrąglij do części dziesiętnych: 129,303
Zaokrąglij do dziesiątek: 4393	Zaokrąglij do setek: 2525	Zaokrąglij do tysięcy: 34280	Zaokrąglij do jedności: 120,307	Zaokrąglij do części dziesiętnych: 400,427
Zaokrąglij do dziesiątek: 185	Zaokrąglij do setek: 61	Zaokrąglij do tysięcy: 5199	Zaokrąglij do jedności: 13,09	Zaokrąglij do części dziesiętnych: 149,96
Zaokrąglij do dziesiątek: 2379	Zaokrąglij do setek: 1513	Zaokrąglij do tysięcy: 39780	Zaokrąglij do jedności: 14,56	Zaokrąglij do części dziesiętnych: 5,24

Zaokrąglij do dziesiątek: 57	Zaokrąglij do setek: 29939	Zaokrąglij do tysięcy: 16025	Zaokrąglij do jedności: 19,64	Zaokrąglij do części dziesiętnych: 13,56
Zaokrąglij do dziesiątek: 1398	Zaokrąglij do setek: 74	Zaokrąglij do tysięcy: 54982	Zaokrąglij do jedności: 85,63	Zaokrąglij do części dziesiętnych: 9,38
Zaokrąglij do dziesiątek: 4996	Zaokrąglij do setek: 69483	Zaokrąglij do tysięcy: 4382	Zaokrąglij do jedności: 95,69	Zaokrąglij do części dziesiętnych: 2,36
Wymień kilka liczb naturalnych	Jaka to część kilometra? 2 m; 1500 cm; 20 m	Podaj liczbę A, jeśli A-4,45=3,25	Wskaż mniejszą liczbę: 3/5 czy 0,7; 0,28 czy 1/4; 0,27 czy 0,267	Zapisz ilorazy liczb w postaci ułamka zwykłego: 7:16; 38:15; 1:100
Wymień kilka liczb całkowitych	Wskaż liczbę równą 9/5: 9,5; 1 15/20; 1 4/5	Podaj liczbę B, jeśli B+6,68=5,32	Zastąp litery odpowiednimi liczbami naturalnymi: 1/2<a/21<1 0<6/b<1/4	Znajdź rozwinięcie dziesiętne podanych liczb: 17/15; 2 11/20; 13/8; 11 5/6
Jak nazywamy liczby, które można przedstawić w postaci ilorazu liczb całkowitych?	Wskaż pary równych ułamków: 9/4; 3/2; 2,25; 2 1/3; 140/60; 1,5	Wskaż większą liczbę: 1/7 czy 1/8; 7/8 czy 8/9; 6,801 czy 6,9	Przedstaw podane liczby w kolejności od największej do najmniejszej: 1/8; -4; 2 3/4; 0; 12	Jaka jest dziesiąta liczba po przecinku: 5,3(52); 2,0(14)
Z jakiego kraju pochodzi system dziesiątkowy?	Wskaż pary liczb przeciwnych: -0,4; 2 1/7; 2/5; -2 1/7; -5/2; 2,5	Gdy zaokrąglamy liczbę 3,(93) do części setnych, otrzymamy: A:3,93 B:3,9 C:4,00 D:3,94	Prawda czy fałsz? Nie każda liczba wymierna ma rozwinięcie skończone lub nieskończone okresowe	Podaj przykład liczby, która spełnia warunek: 1/2<x<0,5; 0,1<x<0(1)

Przedstaw podane liczby w postaci ułamka zwykłego: 170; -1; 0,75; 3 1/3	Czy odwrotność liczby -8 3/6 jest równa liczbie przeciwnej do odwrotności liczby -8 3/6.	Oblicz w pamięci: $\frac{7}{9}+\frac{4}{9}$; $\frac{4}{5}+\frac{2}{5}$; $9-\frac{1}{4}$; $6-2\frac{7}{8}$;	Zastąp „x" liczbami: 3/5 • x/4 = 3 12 • 9/x = 5 2/5	Wartość wyrażenia: 4-3 : (2¼ + 1,25) wynosi: A:7/34 B:2/7 C:3 1/7 D:4 6/7
Prawda czy fałsz? Każda liczba wymierna jest albo dodatnia, albo ujemna.	Które z tych ułamków mają rozwinięcie dziesiętne skończone: 1/3; 1/8; 1/2; 1/30; 1/25	Jak nazywamy ułamki o liczniku 1?	Oblicz, ile to złotych: 100 • 20 gr; 280 • 5 gr	Oblicz w pamięci: -27+12; -23+(-17); 5,5-(-0,8)
Oblicz i przedstaw w postaci ułamka dziesiętnego: 7/10+3/100+ 5/1000, 3+7/1000	Prawda czy fałsz? Liczby o liczniku 0 nie mają liczby przeciwnej	Oblicz w pamięci: 10-2,2; 1-0,009; 1,3-0,8; 1,2 + 2,15	Oblicz: 1 1/3•3 3/4•0,2; 3/4:0,0375	Przedstaw liczbę -8,4 w postaci: a) sumy dwóch liczb ujemnych b) różnicy liczby dodatniej i ujemnej
Zamień te ułamki na ułamki nieskracalne lub mieszane: 1,375; 0,4; 0,84; 14,35	Ile jest liczb naturalnych, których zaokrąglenie do setek wynosi 2500	Oblicz: 1/2•2/3•3/4•4/5•5 /6•6/7•7/8•8/9•9/ 10•10/11• 11/12:12/1	Przedstaw kolejność działań: 1/2•3/4-0,5•0,75; (1-(0,1)2):9	Ile waży litr rtęci, jeśli 7 l waży 94,5 kg?
Zamień na ułamki dziesiętne: 3/4; 3 1/2; 11/25; 19/20	Oszacuj wynik dodawania. Wstaw odpowiedni znak: <;> 4989+698 ? 5700; 502,725+488,11 ? 1000	Oblicz w pamięci: 3/4•10; 10•1/3; 8/9:4; 6:5	Oblicz: 2,75+0,1• 10/0,25•5	Prawda czy fałsz? Iloraz tej liczby i liczby do niej przeciwnej wynosi 1.
Prawda czy fałsz? Każda liczba całkowita jest liczbą naturalną	Oszacuj wynik mnożenia: 68•4; 60•7,2; 6•11,945; 3244•5	Oblicz w pamięci: 2/3 z 60 zł; 1/4 z 12 h; 1 1/2 z 30 min.	Netto to: A: towar z opakowaniem, B: towar bez opakowania C: samo opakowanie	Oblicz: 5-3/7; 0,22-0,12; 6-1 1/2•2/3

Oblicz: 34-4 • 5	Oblicz: 10•(0,5•1/4)	Oblicz: -23+(-17)	Oblicz: 3-15-5	Oblicz: 0,25:5
Oblicz: 20:22	Oblicz: 0,3+0,5•4	Oblicz: 16-60	Oblicz: -7+11-6	Oblicz: 0,8:0,4
Oblicz: 24-(5+6)	Oblicz: 1/2•3/4-0,5•0,75	Oblicz: -15-25	Oblicz: 5-(-12)-7+14	Oblicz: 0,27:0,06
Oblicz: 2•(20+14:2)	Oblicz: (1-(0,1)2):9	Oblicz: -30-(-50)	Oblicz: 2,3•2	Oblicz: 7:0,2
Oblicz: (25-(3+8))•3	Oblicz: (0,1+0,1•15)•10	Oblicz: -3/4+(-3/4)	Oblicz: 0,21•4	Oblicz: 0,9:4,5
Oblicz: 1/2•4-2	Oblicz: (3/4-1/5):1/2	Oblicz: 0,2-0,7	Oblicz: 0,5•20	Oblicz: 23
Oblicz: 1-(3/4)2	Oblicz: 3,2:(0,8-2/5)	Oblicz: -0,6-0,4	Oblicz: 1,3•30	Oblicz: 33

Oblicz: 1+3/7:1/7	Oblicz: 2/3•(1/2-1/6)	Oblicz: -1-(-1/7)	Oblicz: 0,3•0,2	Oblicz: 43
Oblicz: (0,6+0,9):3	Oblicz: -27+12	Oblicz: 5,5-(-0,8)	Oblicz: 0,2•0,43	Oblicz: (1/2)2
Oblicz: 24-(3•4)	Oblicz: -33+11	Oblicz: -0,75+1/4	Oblicz: 0,6:3	Oblicz: 22•3

31. Temat lekcji: Sudoku, czyli graj razem z nami

Na podstawie pracy Katarzyny Chomickiej oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum8 Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Barbara Uniwersał

Podstawowe pojęcia: sudoku, ułamek zwykły, ułamek dziesiętny, potęga, procent, średnia arytmetyczna, liczba pierwsza, odwrotność liczby, rozwiązanie równania.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   5) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających ułamki zwykłe i dziesiętne.

2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie). Uczeń:
   3) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne;
   4) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby wymierne.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Uproszczona pod względem formatu znana gra – jej wartością jest konieczność rozwiązania różnego rodzaju zadań (stopień trudności oraz zestaw zagadnień do ustalenia), niezbędna jest w niej umiejętność logicznego wnioskowania.

Źródło:
Materiały pochodzą z ExploraPark, Park Nauki i Techniki z Wałbrzycha.

Planowane korzyści z gry:
Doskonalenie umiejętności wykonywania działań na liczbach wymiernych oraz logicznego myślenia.

OPIS GRY

Sudoku polega na wpisywaniu liczb w odpowiednie miejsca według określonych zasad. Celem gry jest uzupełnienie diagramu tak, aby cyfry od 1 do 6 nie powtarzały się w żadnej kolumnie, wierszu i przekątnej, zgodnie z zasadami Sudoku.

Instrukcja gry:
W niektórych kratkach Sudoku umieszczone są zadania. Rozwiąż je, a następnie połóż kartonik z otrzymanym wynikiem. Pozostałe pola uzupełnij zgodnie z zasadą Sudoku, czyli w każdej kolumnie, w każdym rzędzie i w każdym wyróżnionym sześcioelementowym module liczby od 1 do 6 nie mogą się powtarzać.

Propozycja modyfikacji gry:
Opracowanie Sudoku w wersji 9×+65+65+65+65+65+65+65+659, próba przygotowania Sudoku tylko dla liczb parzystych.

Zadania w kratkach gry odpowiadające węższemu zagadnieniu (np. tylko potęgi, tylko działania na ułamkach, tylko obliczanie pól wielokątów itp.).

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Prawidłowo przeprowadzona gra miała:
– służyć powtórzeniu odpowiednich, wybranych elementów,
– wykorzystywać logiczne myślenie i kojarzenie faktów, wyciąganie wniosków.

Wybrane załączniki:

Plansza do gry w sudoku

	Mianownik uproszczonego ułamka 0,8		Licznik podwojonego ułamka $\frac{3}{7}$		
			1,78 + 1,22		Reszta z dzielenia liczby 2251 przez 125
	Odwrotność liczby przeciwnej do $-\frac{1}{4}$		2×3^{0}		Obwód trójkąta równobocznego o boku 2
		(-1)×2×(-3)	Ile liczb całkowitych jest między -2,3 a 2,3	Długość boku kwadratu o polu równym 16	Największy wspólny dzielnik liczb 21 i 24
Cyfra dziesiątek w iloczynie liczb 45 i 12	Rozwiązanie równania 2x + 3 = 9	Najmniejsza liczba pierwsza	50 – 4×10 – 9		
	Średnia arytmetyczna liczb 2, 4, 10 i 8	Liczba zer w liczbie sto tysięcy			

32. Temat lekcji: Liczby firankowe

Na podstawie pracy Joanny Jędrzejczyk oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Włodzimierz Gapski

Podstawowe pojęcia: potęga, wyrażenie algebraiczne, liczby firankowe.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
   5) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających ułamki zwykłe i dziesiętne.
3. Potęgi. Uczeń:
   1) oblicza potęgi liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych.
6. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:
   1) opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami;
   2) oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych.

Rekomendacja eksperta CEO:
Interesująca propozycja zajęć z pytaniem problemowym. Po pierwsze pozwala poznać nowe pojęcie: „liczby firankowe”, które, jak okazuje się, mogą stanowić ciekawy obiekt uczniowskich dociekań. Po drugie daje możliwość stosowania przez uczniów różnych strategii w celu rozwiązanie problemu.

Szczegółowo opisano doświadczenie, które ułatwia zrozumienie pojęcia „liczby firankowej” i prowadzi do udzielenia odpowiedzi na pytanie problemowe. Szczególnie cenne dla osób, które zechcą przeprowadzić podobne zajęcia, są uwagi związane z wprowadzeniem pojęcia wzoru rekurencyjnego oraz obrazowe przedstawienie sposobu wieszania firanek za pomocą figur do gry w szachy.

Źródło:
Termin „liczby firankowe" pochodzi z zajęć dydaktyki matematyki pod kierunkiem dr Leona Gulgowskiego z Uniwersytetu Gdańskiego, w których uczestniczyła autorka doświadczenia.

Sam scenariusz zajęć, pomysł na ich przebieg jest autorstwa nauczycielki.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
1. Czy liczba 257 jest „liczbą firankową"? Jeśli tak, to którą z kolei.
2. Czy można sprawdzić to, używając jakiegoś wzoru?

Przykładowe hipotezy zaproponowane przez uczniów:
1. Tak.
2. Istnieje wzór na obliczanie „liczb firankowych".

OPIS DOŚWIADCZENIA

Będziemy sprawdzać, które liczby to „liczby firankowe" oraz odgadniemy wzór na obliczanie „liczb firankowych".

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Liczbę żabek potrzebnych do sprytnego powieszenia firanki.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Jaka powinna być liczba żabek, by sprytnie powiesić firankę. Będziemy obserwować, jak zmieniają się kolejne liczby, próbując odgadnąć ich wzór.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Systemu wieszania żabek.

Instrukcja do doświadczenia:
Materiały:
„Żabki" do wieszania firanek lub inne małe przedmioty mogące je zastąpić (nauczycielka użyła figur szachowych).

Sposób przeprowadzenia doświadczenia:
1. Zastanów się chwilę i przypomnij sobie, w jaki sposób wiesza się firanki.
2. Jaka liczba żabek jest właściwa, by zastosować sposób wieszania firanek „na środku"?
3. Podaj kilka kolejnych „liczb firankowych".
4. Spróbuj odgadnąć wzór.
5. Zapisz wzór w postaci wyrażenia algebraicznego.

6. Wypełnij tabelkę, wpisując do niej kolejne „liczby firankowe” (pierwszy wiersz tabeli to numer „liczby firankowej”).
7. Odpowiedz na pytanie kluczowe: czy liczba 257 jest „liczbą firankową”? Jeśli tak, to którą z kolei?

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Uczniowie wyznaczają kolejne „liczby firankowe” i zapisują je w tabeli:
– pierwszy wiersz – numer kolejnej „liczby firankowej”,
– drugi wiersz – kolejne „liczby firankowe”:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
3	5	9	17	33	65	129	257	513	1025

Wnioski z doświadczenia:
Czy wyniki doświadczenia są zgodne z hipotezą? Odpowiedź uzasadnij:
Tak, ponieważ istnieją wzory umożliwiający wyznaczanie „liczb firankowych”:
– 2x-1 gdzie *x* oznacza poprzednią „liczbę firankową”;
– 2n+1 gdzie *n* oznacza numer danej „liczby firankowej”.

Propozycja pracy domowej:
Sprawdź w domu, czy liczba żabek na karniszach jest „liczbą firankową”.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Doświadczenie to pomaga uczniom dostrzec możliwości stosowania wyrażeń algebraicznych w życiu codziennym oraz ćwiczy sprawność obliczania wartości wyrażenia algebraicznego, a także rozwija logiczne myślenie.

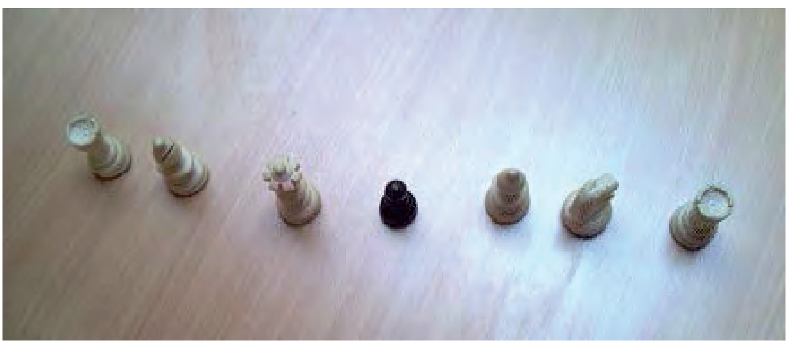
Uczniowie najpierw zastanawiają się nad najlepszym sposobem wieszania firanek (o ile nie znają sposobu „dzielenia poszczególnych części firanki na dwa”). Gdy wszyscy są już zgodni co do sposobu, że najpierw przypinamy na końcach firanki dwie skrajne żabki, następnie środek firanki wieszamy na środkową żabkę, a potem środki poszczególnych części na środkowe żabki itd..., polecam uczniom znaleźć kilka „liczb firankowych”. Aby ułatwić im zadanie, zamiast żabek do wyimaginowanej firanki używają pionków szachowych. Po chwili uczniowie wiedzą już, że liczba żabek musi być nieparzysta. Moim uczniom zaledwie chwilę zajęło odkrycie wzoru rekurencyjnego (podałam im tę nazwę, wyjaśniając, że to taki wzór, w którym do obliczenia każdej kolejnej liczby musimy wykorzystać liczbę bezpośrednio ją poprzedzającą). W ten sposób uczniowie obliczali kolejne liczby, wpisując wyniki do tabeli. Zapytani na przykład o 16. „liczbę firankową” szybko zauważyli, że muszą mieć 15., natomiast do wyznaczenia 15. muszą mieć 14 itd. Uczniowie po odkryciu wzoru rekurencyjnego szybko zorientowali się, że ma on swoje wady: nie można od razu obliczyć dowolnej liczby. Jeden z uczniów odkrył wzór ogólny: 2n+1, po czym z łatwością obliczył wskazaną 16. „liczbę firankową".

Komentarz eksperta:
Prezentowane doświadczenie z pewnością zainteresuje uczniów gimnazjum. Wyznaczanie kolejnych liczb firankowych nie wymaga skomplikowanych obliczeń, ale ścisłego stosowania określonych reguł. Doskonałym ćwiczeniem jest natomiast szukanie wzoru pozwalającego wyznaczyć te liczby. Reguła zapisana w postaci wyrażenia algebraicznego pozwala zaznajomić uczniów z pojęciem wzoru rekurencyjnego, którego „niedostatki" związane z koniecznością wyznaczania po kolei każdej liczby firankowej łatwo zauważyć. Można więc zachęcić ich do poszukiwania innego wzoru, który umożliwi bezpośrednie obliczenie dowolnej liczby firankowej poprzez dokonanie pewnych modyfikacji w karcie pracy. I tak, w instrukcji warto doprecyzować zapis odnoszący się do „odkrywania" wzoru na kolejne liczby firankowe. Można na przykład sformułować następujące pytanie: *Czy dostrzegasz jakiś związek między kolejnymi liczbami firanowymi?* a potem kolejne polecenia. Oto przykładowa propozycja: *Zapisz wyrażenia algebraiczne, które pozwalają wyznaczyć drugą, trzecią, czwartą liczbę firankową*, a potem: *Zapisz wzór na n-tą liczbę firankową?* Warto także podjąć próbę innego zdefiniowania zmiennych w doświadczeniu.

– Zmienne niezależna: liczba użytych żabek.
– Zmienna zależna: liczba żabek potrzebna do „sprytnego" zawieszenia firanki.
– Zmienna kontrolna: numer kolejnej liczby firankowej.

Więcej informacji na temat „firankowej matematyki" można znaleźć w materiale opublikowanym na stronie http://romanj.blox.pl/2007/10/Matematyka-i-firanki.html (data dostępu 03 kwietnia 2012).

Wybrane załączniki:
Zdjęcie wykonane podczas przeprowadzania doświadczenia



33. Temat lekcji: Jak podzielić 7 jabłek na 8 ludzi?

Na podstawie pracy Haliny Wardy oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: ułamek, suma, licznik, mianownik, połowa, ćwiartka, część ósma, rozkład ułamków na ułamki proste.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora).

Rekomendacja eksperta CEO:
Praktyczna działalność doświadczalna może okazać się przyczyną poszukiwań rozwiązań teoretycznych optymalizujących procedury. Niedostatek materii badawczej otwiera pole do teoretycznych rozważań matematycznych i pokazuje praktyczne znaczenie tej dyscypliny ludzkiego poznania.

Jak to zrobić, wykorzystując krojenie jabłek pokazuje zaproponowane ciekawe doświadczenie matematyczne. Można nim zainteresować wszystkich uczniów, nawet, a może zwłaszcza tych, którzy mają problem z oswajaniem ułamków. Propozycja otwiera także obszary poszukiwawczo-poznawcze dla uczniów uzdolnionych matematycznie i stwarza możliwość kontynuacji badań poprzez przeprowadzenie kolejnych zajęć z pytaniem problemowym.

Źródło:
Ryszard Jajte, Włodzimierz Krysicki, *Z matematyką za pan brat*, Wydawnictwo Iskra, Warszawa 1985.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Ile najmniej cięć trzeba wykonać, by podzielić 7 jednakowych jabłek na 8 równych części?

Przykładowa hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Liczba cięć 4 × 7 = 28.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Składniki sumy 7/8 .

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Liczbę cięć i liczbę składników.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Liczby jabłek i liczby osób.

Instrukcja do doświadczenia:
Materiały:
7 jabłek, nóż, deska.

Sposób przeprowadzenia doświadczenia:
- Zastanówcie się, w jaki sposób można rozdzielić równo znajdujące się przed wami 7 jabłek między 8 osób?
- Pamiętajcie, żeby wykonać jak najmniej cięć.
- Dokonajcie podziału jabłek, korzystając z rozkładu ułamka na sumę ułamków o licznikach równych jedności i różnych mianownikach 7/8 = 1/2+1/4+1/8.
- Obliczcie, ile cięć wykonaliście?
- Wyciągnijcie wnioski.

Instrukcja zaproponowana przez eksperta:
Uwaga! Najpierw przeczytajcie i wykonajcie pierwszy punkt instrukcji.
1. Podzielcie 7 jednakowych jabłek na 8 równych części, starając się wykonać jak najmniej cięć (jednocześnie można przecinać tylko jedno jabłko lub jego część). Zanotujcie, ile cięć wykonaliście.
2. Zauważcie, że każda część to 7/8 jabłka. Taki ułamek można zapisać w postaci następującej sumy: 7/8 = 1/2+1/4+1/8.
3. Zaplanujcie, jak wykorzystać to spostrzeżenie do ponownego podziału. Swoją propozycję narysujcie w karcie pracy.
4. Czy tym razem uzyskaliście taką samą liczbę cięć?
5. Czy jesteście pewni, że taka liczba cięć jest najmniejsza, dlaczego?

BHP:
Zachowajcie szczególną ostrożność przy używaniu noża. Nie dotykajcie ostrza!

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Uczniowie oczywiście mogą wykonywać zdjęcia, które pokażą, jak wykonali zadanie.

Zdjęcie wykonane podczas przeprowadzania doświadczenia

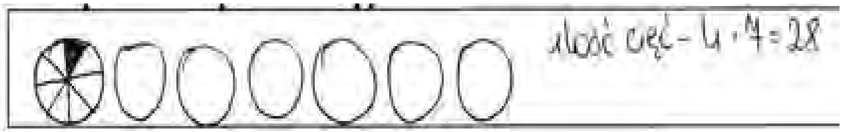
Należy też zwrócić uwagę na niezwykle cenne aspekty doświadczenia wskazane w sprawozdaniu autorki:

„Wśród uczniów znaleźli się tacy, którzy mieli zaległości w działaniach na ułamkach i wykazywali zupełną bezradność w rozwiązywaniu zadań na lekcjach. Aby zainteresować ich doświadczeniem, rozdałam każdej grupie po 7 jabłek. Moja obserwacja skupiła się szczególnie na ich pracy. Początkowo obserwowali pracę innych, ale znając metodę, szybko wzięli się do krojenia jabłek. Moim zadaniem było utworzenie pomostu pomiędzy myśleniem konkretnym i myśleniem abstrakcyjnym. Uczniowie ci wykonywali nawet prawidłowo obliczenia na ułamkach, które nie służyły rozwiązaniu tego problemu”

oraz:

„najważniejsze jest zainteresowanie problemem, a następnie chęć jego rozwiązania. W nauczaniu na lekcjach trudności zjawiają się wtedy, gdy rozwiązujemy bardziej złożone zadania, a mamy zbyt mało czasu, słabszych uczniów zaczyna to nużyć i zniechęcać. Podczas spotkań Au mamy większe możliwości posłużenia się operacjami na konkretach, poszukania nowych sposobów rozwiązań problemów, co umożliwia im wykazanie się większą samodzielnością”.

Można zatem założyć, że uczniowie potknąć się mogą o niedostatek tworzywa badawczego (z takim problemem zmagało się wielu eksperymentatorów, np. Maria Skłodowska-Curie) i to, być może, stanowi nadzieję na chęć matematyzacji problemu oraz innego sposobu dokumentowania prac badawczych, np. tak, jak to widzimy w jednej z kart pracy:



Rysowanie schematów dokumentujących próby rozwiązania zagadnienia jest tu dobrym rozwiązaniem uzupełniającym także dlatego, że stwarza szansę skutecznych poszukiwań i swobodnego porównywania różnych koncepcji.

Propozycja pracy domowej:
Czy dzieląc 7 jabłek na 8 równych części można wykonać 49 cięć?

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Istotą eksperymentu jest poszukiwanie optymalizacji rozwiązania poprzez dyrektywę wykonania jak najmniejszej liczby cięć i ograniczenie zaproponowanego materiału doświadczalnego. Szczególnie to drugie ograniczenie wydaje się istotne i stąd propozycja modyfikacji instrukcji i sposobu dokumentowania wyników badań. Kolejnym wskazaniem jest delegacja prowadzenia dalszych odkryć i odpowiedzi na pytanie: „czy zaproponowane rozwiązanie prowadzi do optymalizacji i dlaczego?”. Tak więc proponuję potraktować doświadczenie jako wprowadzające do kolejnych zajęć z pytaniem problemowym, którym może być 5. punkt instrukcji. Zwróćmy bowiem uwagę na fakt, że rozkład ułamków właściwych na ułamki proste nie jest zadaniem łatwym i jednoznacznym. Samo poszukiwanie algorytmu postępowania stwarza frajdę dla młodych matematyków. Można to prześledzić np. na przykładzie rozkładu jedynki:

1 = 1/2 + 1/3 + 1/6

Ale jeśli nie zaczniemy rozkładu od 1/2, możemy otrzymać mniej optymalny co do „liczby cięć”, np.:

1 = 1/3 + 1/4 + 1/6 + 1/12 lub wiele jeszcze mniej optymalnych.

Stąd warto zaproponować uczniom (a może sami to odkryją), że każdorazowo staramy się wykorzystać tu największy możliwy ułamek prosty. W przypadku 7/8 będzie to oczywiście 1/2, ale jak postąpić dalej?

7/8 – 1/2 = 3/8

Tu widać, że 1/2 jest już za duży, a kolejny największy ułamek prosty to 1/3.

$3/8 - 1/3 = 9/24 - 8/24 = 1/24$

Ta optymalizacja ilości użytych ułamków wcale nie powoduje optymalizacji liczby cięć i w tym znaczeniu propozycja równolicznego rozkładu zaproponowanego w instrukcji doświadczenia jest lepsza. Wkraczamy tu bowiem w obszar matematyki stosowanej. Dyskusja rozwiązań ze względu na procedurę wykonywalności praktycznej stwarza szansę wciągnięcia uczniów w realną przygodę, która może stać się ich życiową pasją – zawodem. Matematyka odegra rolę wyjątkowo cennej dyscypliny wiedzy teoretycznej stwarzającej możliwość realizacji powołania do myślenia w dorosłym życiu zawodowym.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Prawidłowo wykonane doświadczanie powinno:
- pozwolić uczniom samodzielnie ustalić własne rozwiązanie;
- umożliwić porównanie z rozwiązaniem zaproponowanym w instrukcji;
- wytworzyć zapotrzebowanie na teoretyczne rozwiązanie z wykorzystaniem wiedzy matematycznej;
- zachęcić uczniów do poszukiwania sposobów optymalizacji problemu dla różnych ułamków.

34. Temat lekcji: Z Ziemi na Księżyc

Na podstawie pracy Ewy Wąsik oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: jednostki długości i ich zamiana, działania w zbiorze liczb wymiernych, potęgi, notacja wykładnicza.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   4) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb;
   6) szacuje wartości wyrażeń arytmetycznych;

7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (…).

3. Potęgi. Uczeń:
   1) oblicza potęgi liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych;
   5) zapisuje liczby w notacji wykładniczej, tzn. w postaci a × 10k, gdzie 1 ≤ a < 10 oraz k jest liczbą całkowitą.

Źródło:
Albrecht Beutelspacher, Marcus Wagner, *Pitagoras bez cyrkla, czyli jak przejść przez pocztówkę*, Instytut Wydawniczy PAX, 2010.

Rekomendacja eksperta CEO:
Problem zaproponowany do zbadania ma potencjał efektu Eureki. Wykładniczy przyrost grubości kartki bardzo zaskakuje uczniów. Te zajęcia z pytaniem problemowym wymagają od nich dobrego operowania potęgami – w tym zapisu liczb w notacji wykładniczej. Można samodzielnie przemyśleć program badań i zaproponować zupełnie inny sposób dochodzenia do odkrycia. Tu bardzo liczy się kreatywność nauczyciela. Całkiem dobrym rozwiązaniem jest zaproponowanie, by to sami uczniowie zaproponowali sposób badania i realizując ten plan, zastanawiali się nad uproszczeniem oraz modyfikacją instrukcji.

Zaletą doświadczenia jest konieczność wykorzystania wielu umiejętności i połączenia wiedzy z wielu obszarów szkolnej matematyki (patrz podstawa programowa). Warto także zbadać, ile razy da się zgiąć rzeczywista kartka, by uczniowie mieli świadomość umysłowego scenariusza badań – bez możliwości realnego budowania nawet większego fragmentu podestu do Księżyca z bardzo dużej kartki papieru.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Ile razy należy zgiąć kartkę papieru, aby wysokość powstałej warstwy była w przybliżeniu równa odległości z Ziemi na Księżyc?

Komentarz eksperta: Można zaproponować pytanie problemowe w wersji zawierającej sugestie odpowiedzi.

Przykładowe hipotezy zaproponowane przez uczniów:
Przy pytaniu zaproponowanym przez nauczycielkę uczniowie sformułowali m.in. następujące hipotezy:

– 100 razy,
– 38 000 razy.

Komentarz eksperta: Pytanie ma ogromny potencjał w sensie pojawienia się efektu Eureki; wystarczy zerknąć na hipotezy wynotowane tylko z dwóch kart pracy przedstawionych przez nauczycielkę. Być może warto to wykorzystać, oferując podpowiedzi, np.:
A. mniej niż 50 razy;
B. około 500 razy;
C. około 5 000 razy;
D. około 5 000 000 razy.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Liczbę zgięć kartki na połowę.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Grubość warstw papieru.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Grubości jednej kartki, którą wirtualnie zginamy.

Instrukcja do doświadczenia:
Materiały:
– ryza papieru A4 (może być wypożyczona na pomiary z sekretariatu),
– linijka,
– ewentualnie kalkulator,
– tablice geograficzne.

Wykonanie – wersja zaproponowana przez nauczycielkę:
Bierzemy papier ksero i zginamy go na pół, potem jeszcze raz na pół itd.

Ile razy należy zgiąć kartkę papieru, aby grubość powstałej warstwy była w przybliżeniu równa odległości z Ziemi na Księżyc?

Uzupełnij kartę pracy. Do obliczeń możesz wykorzystać kalkulator.

Spróbuj zapis uogólnić.

Wykonanie – wersja zaproponowana przez eksperta:
1. Przyjmij szacunkową odległość Księżyca od Ziemi jako 400 000 km (możesz poszukać informacji o dokładniejszych szacunkach).
2. Przybliżoną grubość wirtualnej kartki, którą będziemy „zginać” otrzymaliśmy, dzieląc grubość ryzy papieru przez liczbę kartek w ryzie – oszacowanie z dokładnością do dziesiątych części milimetra.

3. Uzupełniaj szare pola tabeli badawczej.
4. Zaprojektuj badanie dla przewidywanej przez siebie, potrzebnej liczby zgięć, wykorzystując wolne pola tabeli.
5. Ustal, po którym zgięciu grubość warstw dorówna lub przekroczy odległość Ziemia – Księżyc.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Wersja zaproponowana przez nauczycielkę

Odległość z Ziemi na Księżyc wynosi około …………………………………

Zapisz wynik w notacji wykładniczej:…………………..................................

Liczba zgięć	Grubość kartki papieru		
	mm	cm	km
	0,05	0,005	0,00000005
1			
2			

Udało nam się złożyć papier ………razy.

Wysokość stosu papieru wynosi około …………. cm.

Zauważyliśmy, że ……………………………

Obliczenia i wnioski:
Kartkę należy złożyć …………………..razy, aby osiągnęła odległość z Ziemi do Księżyca.

Wersja zaproponowana przez eksperta
Tabela badawcza oraz miejsca na obliczenia bezpośrednio w karcie pracy:

Stałe	Odległość Księżyc -Ziemia w metrach:	40000000 (4×10^7)	Grubość ryzy:	0,05 m	Liczba sztuk w ryzie:	500	Grubość kartki w metrach	0,0001 (10^{-4})	210 ≈ 103
Nr zgięcia	Liczba warstw	Liczba warstw – zapis wykładniczy	Szacunkowa grubość stosu po kolejnym zgięciu w metrach *pomnóż liczbę warstw przez grubość kartki*						
1	2	2^1	2×10^{-4}						
2	4	2^2							
3	8	2^3							
– – –									
10	10^3	2^{10}	$10^3\times10^{-4}=10^{-1}$						
20									
30									
40									
50									

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Zaproponowano modyfikacje: instrukcji, pytania badawczego, sposobu dokumentowania prac badawczych uczniów. Ta modyfikacja prowadzi do uproszczenia obliczeń i szacunków, bowiem celem zasadniczym było uzyskanie efektu zdumienia poznawczego wynikłego z przeprowadzonych badań. Możliwe jest ich prowadzenie w trudniejszej wersji zaproponowanej przez nauczycielkę. Świetnym pomysłem jest kontynuacja tego typu badań poprzez konstrukcję narzędzia badawczego – arkusza kalkulacyjnego (propozycja pracy domowej).

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Prawidłowo wykonane doświadczanie powinno:
- umożliwić uczniom zapisywanie liczby powstających warstw w postaci potęg o podstawie 2 i wykładniku równym liczby zgięć kartki;
- pozwolić szacować grubość składanej kartki z wykorzystaniem przybliżonej wartości potęgi 2^{10} jako 10^3 (nawiązać do informatycznej koncepcji przedrostka kilo);
- wykorzystać twierdzenia dotyczące mnożenia potęg o tych samych podstawach i potęgowania potęgi;

– wykorzystać umiejętność zapisu liczb w postaci wykładniczej;
– pozwolić szacować wyniki obliczeń oraz przeliczać jednostki długości;
– doprowadzić do efektu Eureki;
– zachęcić do odrobienia pracy domowej – wykorzystania arkusza kalkulacyjnego jako narzędzia badawczego.

Propozycja pracy domowej:
Sporządź obliczenia w arkuszu kalkulacyjnym Excel.

35. Temat lekcji: Giełda – gra z zastosowaniem procentów

Na podstawie pracy Sylwii Marcinkowskiej oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: obliczenia procentowe, zaokrąglanie liczb, działania na liczbach wymiernych, obniżka, podwyżka.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń (także z wykorzystaniem kalkulatora);
   4) zaokrągla rozwinięcia dziesiętne liczb.
5. Procenty. Uczeń:
   2) oblicza procent danej liczby;
   4) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, np. oblicza ceny po podwyżce lub obniżce o dany procent, wykonuje obliczenia związane z VAT, oblicza odsetki dla lokaty rocznej.

Cele kształcenia – wymagania ogólne:
II etap edukacyjny: klasy IV–VI
I. Sprawność rachunkowa.

Uczeń wykonuje proste działania pamięciowe na liczbach naturalnych, całkowitych i ułamkach, zna i stosuje algorytmy działań pisemnych oraz potrafi wykorzystać te umiejętności w sytuacjach praktycznych.

Rekomendacja eksperta CEO:
Zaletą tej gry są oczywiste korzyści dydaktyczne; uczniowie ćwiczą obliczanie zysków i strat, obliczając procent danej liczby, stosują zaokrąglenia, doskonalą działania na liczbach wymiernych i sprawność rachunkową. Na podkreślenie zasługuje fakt, że uczniowie chętnie podejmują aktywność, gdyż obliczenia procentowe osadzone są w realnej sytuacji życiowej. Ważnym, koniecznym do podkreślenia elementem wychowawczym jest konstatacja nieprzewidywalności wyników giełdowych sesji i ryzyka, jakie niesie inwestowanie realnych pieniędzy. W tym celu warto być może przygotować niejawny model statystyczny losowania gwarantujący częstsze spadki niż zwyżki na giełdzie (patrz przykładowe narzędzie przygotowane przez eksperta).

OPIS GRY

Planowane korzyści z gry:
Przećwiczenie umiejętności wykonywania obliczeń z zastosowaniem procentów (podwyżka, obniżka), doskonalenie działań na liczbach wymiernych oraz zaokrąglanie liczb.

Instrukcja gry:
1. Uczniowie zostają podzieleni na grupy 4–5-osobowe.
2. Każda grupa otrzymuje kartę maklera oraz do dyspozycji 2000 zł.
3. Grupy wspólnie ustalają ceny firm na początku.
4. Każda z grup może dokonać zakupu dowolnej ilości akcji do wysokości 2000 zł, jeszcze przed pierwsza sesją.
5. Dowolny uczeń rzuca kostką sześcienną z zapisanymi na jej ściankach procentami i losuje kartkę decydującą, czy to będzie podwyżka czy obniżka ceny akcji.
6. Kolejni uczniowie powtarzają te czynności czterokrotnie, ponieważ jest 5 przedsiębiorstw.
7. Uczniowie obliczają nowe ceny akcji.
8. Uczniowie mogą kupić lub sprzedać akcje poszczególnych firm.
9. Następnie odbywają się kolejne sesje w ten sam sposób.
10. Na koniec uczniowie podliczają swój zysk lub stratę.

Opis strategii, jaką obrali uczniowie:
Gra wg zaproponowanej instrukcji nie jest grą strategiczną, gdyż o powodzeniu (ostatecznym zysku na giełdzie) decyduje los.

Propozycja modyfikacji gry:
W grze można modyfikować:
- kwotę przeznaczoną na zakup akcji,
- początkową wartość akcji poszczególnych firm,
- liczbę firm,
- procenty na ściankach kostki,
- sposób ustalania zmian procentowych,
- sposób ustalania, czy nastąpi zwyżka czy zniżka cen akcji na giełdzie.

Ambitnym zadaniem dla konstruktorów gry zbudowanej na tej zasadzie byłoby wymyślenie sposobu na możliwość wpływu strategicznego na jej wynik. Uczniowie mogliby np. proponować różne poziomy procentowe (w wyznaczonym zakresie) dla poszczególnych firm przed każdą sesją i ustalać je jako średnią propozycji. Mieliby wówczas wpływ na wzrosty i spadki. Grę można także urozmaicić, prowadząc po każdej sesji giełdę akcji, które inni zaproponowaliby do odsprzedaży.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Prawidłowo przeprowadzona gra miała pokazać/nauczyć:
- obliczania procentu danej liczby,
- prawidłowego zaokrąglania liczb z ustaloną dokładnością (do pełnych złotych lub groszy),
- sprawnych obliczeń na liczbach wymiernych,
- nieprzewidywalności zachowań giełdowych,
- ryzyka gry na giełdzie,
- odpowiedzialności za powierzony kapitał.

Wybrane załączniki:
Przykładowe narzędzie do losowania na giełdzie gwarantujące częstsze zniżki:
https://au.ceo.nq.pl/files/courses/45/losowanie_na_gieldzie.xlsx

Procent	Zwyżka/zniżka	
45%	**zniżka**	1
Naciśnij klawisz funkcyjny **F9**		

Karta maklera

NAZWA PRZEDSIĘBIORSTWA	CENA JEDNEJ AKCJI									
	SESJA 1		SESJA 2		SESJA 3		SESJA 4		SESJA 5	
	%	CENA	%	CENA	%	CENA	%	CENA	%	CENA
A										
B										
C										
D										
E										

KARTA MAKLERA

Nr sesji	KUPNO					SPRZEDAŻ				
	Nazwa akcji	Liczba akcji	Cena jednej akcji	Wartość kupionych akcji	Ile pieniędzy pozostało	Nazwa akcji	% spadku / wzrostu	Cena jednej akcji	Wartość sprzedanych akcji	Ile mam pieniędzy
1										
2										
3										
4										
5										
									Ile straciłem / zyskałem	

Efekt rozgrywki na giełdzie

2000,-

NAZWA PRZEDSIĘBIORSTWA		CENA JEDNEJ AKCJI									
		SESJA 1		SESJA 2		SESJA 3		SESJA 4		SESJA 5	
		%	CENA	%	CENA	%	CENA	%	CENA	%	CENA
A	20,-	+15%	23,-	+10%	25,3,-	-5%	24,04-	-20%	19,24,-	+5%	19,92
B	30,-	+3%	30,9,-	+5%	32,45,-	-20%	25,96	+8%	28,04,-	-15%	23,83
C	50,-	+15%	57,5,-	-10%	51,75,-	-20%	41,4,-	+10%	45,54,-	+3%	46,91,-
D	70,-	-8%	64,4,-	+8%	69,55	-8%	63,99	-3%	62,07	+8%	67,14,-
E	100,-	+3%	103,-	+3%	106,12	-20%	84,90	+3%	87,44,-	+20%	~~104,90~~ 104,89,-

KARTA MAKLERA

Nr sesji	KUPNO					SPRZEDAŻ				
	Nazwa akcji	Liczba akcji	Cena jednej akcji	Wartość kupionych akcji	Ile pieniędzy pozostało	Nazwa akcji	% spadku / wzrostu	Cena jednej akcji	Wartość sprzedanych akcji	Ile mam pieniędzy
1	C	4	50,-	200,-	1800,-	C		46,91x4	187,64	-12,36
2	~~E~~A	50	23,-	1150,-	650,-	A		19,92x50	996	650-996 = +346
3	E	~~100~~5	106,12	5306-	119,4	E		104,89x5	524,45	524,45-5306 = -5,55
4	~~B~~D	1	63,99	63,99	55,41	D		67,14x1	67,14	63,99-67,14 = +3,26
5										
									Ile straciłem / zyskałem	+331,35

2 331,35,-

36. Temat lekcji: Czy wszyscy uczniowie naszej szkoły zmieściliby się w pracowni, w której masz lekcje matematyki?

Na podstawie pracy Henryki Rożniak oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Barbara Uniwersał

Podstawowe pojęcia: pole, jednostki długości i pola i ich zamiana, wielkości wprost proporcjonalne, szacowanie.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

10. Figury płaskie. Uczeń:
    9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów;
    11) oblicza wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali.
1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
    7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy wszyscy uczniowie naszej szkoły zmieściliby się w pracowni, w której masz lekcje matematyki?

Możliwe hipotezy zaproponowane przez uczniów:
Komentarz nauczycielki: Wszystkie grupy, zarówno te, które szacowały, że możliwe jest pomieszczenie wszystkich uczniów w naszej pracowni, jak i te, które szacowały, że jednak nie, były szczerze zaskoczone wynikiem doświadczenia.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Podczas zajęć uczniowie klasy pierwszej próbowali odpowiedzieć na pytanie Fermiego: „Czy wszyscy uczniowie naszej szkoły zmieściliby się w naszej pracowni matematycznej?". Grupy dokonywały pomiarów pracowni i prostokąta zajmowanego przez jednego lub kilku uczniów, uśredniały wyniki, zamieniały jednostki długości i pola. Od samego początku dyskutowali, czy można w tej konkretnej sytuacji, rozwiązując postawiony przed nimi problem, dzielić pole powierzchni klasy przez pole prostokąta zajmowanego przez jednego, kilku uczniów.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Pole powierzchni zajmowane przez jednego ucznia.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Liczbę uczniów, która zmieściłaby się w naszej klasie.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Pola powierzchni pracowni.

Instrukcja do doświadczenia
Zajęcia prowadzimy w grupach

1. Podzielcie się zadaniami:
   A. osoba dokonująca pomiarów pracowni i prostokąta zajmowanego przez jednego ucznia,
   B. osoba zapisująca wymiary pracowni i obliczająca jej pole,
   C. osoba ustalająca średnie wymiary prostokąta zajmowanego przez jednego ucznia,
   D. i E. osoby obliczające, ilu uczniów zmieści się w pracowni.
   A. i B. pilnują czasu i poprawności rachunków.
2. Wspólnie ustalacie wynik, porównujecie go ze swoją hipotezą i przygotowujecie się do prezentacji wyników na forum klasy.
3. Zastanówcie się, jak dotychczasowa wiedza pomogła Wam w tym doświadczeniu, czy w życiu spotkaliście się już z taką metodą postępowania?

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Obliczenia uczniowskie.

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Zastanów się, czy mógłbyś obliczyć, na jak długo wystarczyłoby tlenu dla wszystkich uczniów w takich warunkach? Jakie dane byłyby Ci potrzebne?

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
To doświadczenie jest dobrą okazją do przypomnienia zamiany jednostek, szczególnie pola, co zwykle sprawia uczniom sporo kłopotów, jak też działań na liczbach wymiernych.

37. Temat lekcji: Jaki jest koszt wysiania trawy na działce o rzeczywistych wymiarach?

Na podstawie pracy uczniów pod opieką Elżbiety Guziak. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: skala, pole powierzchni, jednostki miary, jednostki powierzchni, zamiana jednostek.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
10. Figury płaskie. Uczeń:
    9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów;
    11) oblicza wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali.
1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
    7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (…).

Rekomendacja ekspertki CEO:
Podczas zajęć uczniowie, rozwiązując konkretny problem musieli wykazać się umiejętnością obliczania pól wielokątów powiększonych w danej skali oraz zamianą jednostek. Bardzo dobre, praktyczne i sensowne ćwiczenie.

Źródło:
Uczniowie sami wymyślili swoje doświadczenie, jednakże inspiracją do tego było podobne zadanie w podręczniku Heleny Lewickiej i Marianny Kowalczyk „Matematyka wokół nas" do klasy 5. Było to zadanie o żwirku na działce. Wtedy wszyscy wspominali letnie spotkania na działce jednego z uczniów. I tak zrodził się pomysł tego doświadczenia.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Jaki jest koszt wysiania trawy na działce o rzeczywistych wymiarach?

Przykładowa hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Nasiona zakupione na trawnik będą kosztowały mniej niż 100 zł.

OPIS DOŚWIADCZENIA

W tym doświadczeniu uczniowie musieli najpierw odczytać z planu rzeczywiste wymiary działki. Następnie wyliczali, jaką powierzchnię przeznaczono pod trawnik. Po wykonaniu obliczeń pola powierzchni trawnika planowali zakup nasion trawy i obliczali koszt z tym związany.

Celem doświadczenia jest wyliczenie kosztów wysiania trawy na działce, której plan wykonano w skali 1:200.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Cenę nasion.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Część działki przeznaczona pod trawnik.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Wielkości działki pod uprawę nasion.

Instrukcja do doświadczenia:
Każdy z uczniów otrzymuje plan działki złożony z trzech części.

Przed przystąpieniem do obliczania kosztów nasion trzeba obliczyć rzeczywiste wymiary działki. Następnie należy wyliczyć, jaką powierzchnię przeznaczono na trawnik.

Potem powinno się obliczyć, ile opakowań trawy trzeba kupić i ile to będzie kosztowało.

Jedno opakowanie 1 kg trawy CENTNAS wystarcza na 45 m² działki i kosztuje 16,99 zł.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Aby obliczyć pole powierzchni działki przeznaczonej na trawnik, podzieliliśmy ją na trzy części. Każda z części ma kształt prostokąta.

	Wymiary z planu	**Wymiary rzeczywiste**
Część 1	0,5 × 8,5 cm	1 × 17 m
Część 2	5,5 × 2,5 cm	11 × 5 m
Część 3	6,5 × 9 cm	13 × 18 m

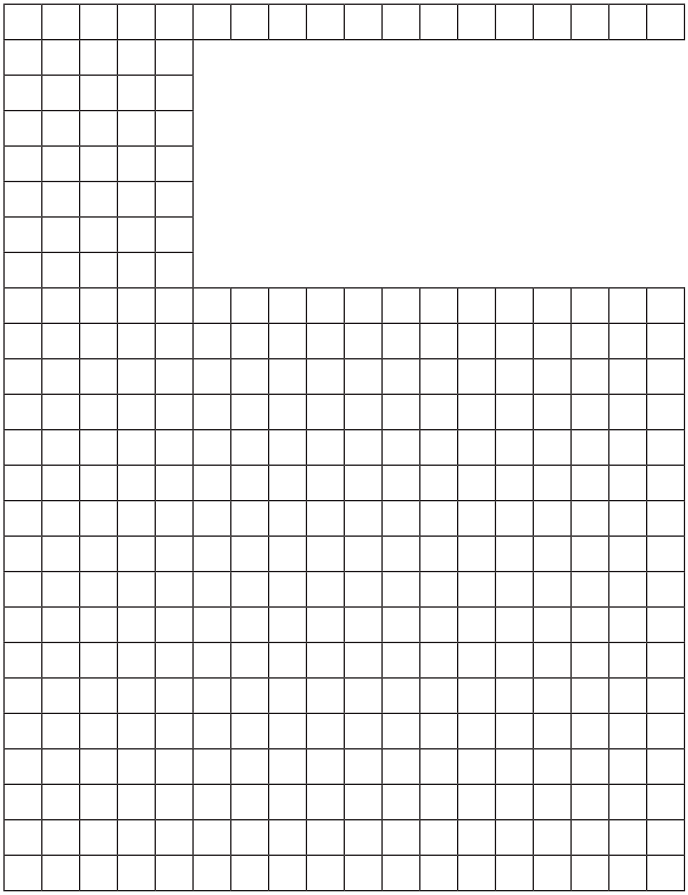
P = P1 +P2 +P3
P1 = 1 × 17 m = 17 m^2
P2 = 11 × 5 m = 55 m^2
P3= 13 × 18 m = 234 m^2
P = 17 m^2 + 55 m^2 + 234 m^2 = 306 m^2
Jedno opakowanie 1 kg trawy CENTNAS wystarcza na 45 m^2 działki i kosztuje 16,99 zł.

Na naszą działkę trzeba kupić 7 opakowań. Więc 7 x 16,99 zł = 118,93 zł.

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Uczniowie mogą dostać różne wymiary działek (też o różnych kształtach) lub mogą sporządzić wcześniej plan własnego ogrodu. Można też do obliczeń użyć traw o różnych cenach.

Wybrane załączniki:

Plan działki (1 kratka oznacza fragment działki o polu 1 m^2)



II. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie)

2. Temat lekcji: Ile szczebli będzie miała drabina sięgająca do Księżyca?

Podstawowe pojęcia: odległość z Ziemi do Księżyca, zamiana jednostek długości i czasu.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 23.

4. Temat lekcji: Krzyżówka liczbowa „Dobrze poukładany człowieczek”

Podstawowe pojęcia: ułamek zwykły, liczba dziesiętna, dzielnik liczby, rzymski system zapisu liczb.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 27.

5. Temat lekcji: Eksperyment z podręcznikami

Podstawowe pojęcia: pole prostokąta, jednostki długości i pola.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 31.

10. Temat lekcji: Jak przewidzieć sumę trzech liczb, znając tylko pierwszą z nich?

Podstawowe pojęcia: suma liczb.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 42.

23. Temat lekcji: Jaka odległość dzieli moje miasto Miłomłyn od wielkich miast Polski?

Podstawowe pojęcia: skala mapy, odległość między miastami.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 76.

31. Temat lekcji: Sudoku, czyli graj razem z nami

Podstawowe pojęcia: sudoku, ułamek zwykły, ułamek dziesiętny, potęga, procent, średnia arytmetyczna, liczba pierwsza, odwrotność liczby, rozwiązanie równania.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 103.

38. Temat lekcji: Trzy liczby – gra planszowa

Na podstawie pracy Bogumiły Nadobnej oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: iloczyn, iloraz, suma, różnica, obliczanie wartości wyrażenia arytmetycznego, kolejność wykonywania działań.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie). Uczeń:
   3) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne;
   4) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby wymierne.

Rekomendacja eksperta CEO:
Gra jest bardzo kształcąca i pozwala znakomicie realizować zakładane cele edukacyjne. Na jakość gry bardzo wpłynie dobre przemyślenie planszy i żetonów tak, by istniała duża możliwość otrzymywania wyników poprzez wybór różnych trójek i działań. Ćwiczy spostrzegawczość, utrwala zasady dotyczące kolejności wykonywania działań oraz pojęcia określające nazwy z nimi związane. Stwarza szansę licznych modyfikacji.

Źródło:
Gra opracowana na podstawie podobnej przedstawionej nauczycielom podczas warsztatów prowadzonych przez GWO.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Jakie kombinacje działań na trzech liczbach pozwolą Ci uzyskać wylosowany wynik?

OPIS GRY

Planowane korzyści z gry:
Powtórzenie i utrwalenie wiadomości dotyczących działań na liczbach wymiernych, utrwalenie pojęć matematycznych, kolejności wykonywania działań.

Instrukcja gry:

Zestaw do gry składa się z planszy przygotowanej dla każdego uczestnika.

W grze może grać dowolna liczba graczy.

Uczniowie siadają w kole. Jeden z graczy wyciąga żeton i pokazuje go tak, aby wszyscy gracze widzieli znajdującą się na nim liczbę.

Każdy z graczy próbuje znaleźć trzy liczby leżące obok siebie (w pionie, poziomie lub po skosie), z których poprzez dowolne działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie lub dzielenie można otrzymać szukaną wartość.

Za poprawne pokazanie przykładu gracz otrzymuje punkt.

Gracze starają się zdobyć jak najwięcej punktów.

Instrukcja została minimalnie zmieniona przez eksperta w stosunku do zaproponowanej przez nauczycielkę tak, by gra nie prowadziła do rywalizacji między uczniami, a zwycięstwo oznaczało sukces każdego z graczy, któremu uda się otrzymać liczbę na żetonie.

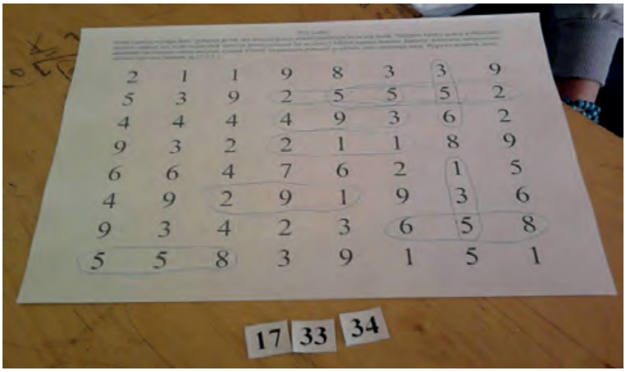
Opis strategii uczniowskiej:
W grze można stosować różne działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Trzeba znać kolejność wykonywania zadań, aby uniknąć błędnych wyników.

Propozycja modyfikacji gry:
Grę można zmodyfikować, poszerzając zakres działań o zadania dotyczące ułamków, potęg lub pierwiastków.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Warto przedstawić wypowiedź samej nauczycielki:

„Przygotowując grę, chciałam, żeby uczniowie zapamiętali podstawowe działania na liczbach wymiernych. Chciałam, żeby zwrócili uwagę i zapamiętali, jak ważna jest kolejność wykonywania zadań. Chciałam, by utrwalili poznane terminy matematyczne: iloczyn, iloraz, suma czy różnica. Na początku wydawałoby się prosta gra stwarzała uczniom słabym nie lada kłopoty. Zadanie okazało się trudne, ponieważ w tej grupie mam wyjątkowo słabych uczniów, z trudnościami w uczeniu się matematyki. Musiałam wielokrotnie przypominać zasadę gry, mimo iż mieli ją przed sobą. Ale po kilkukrotnym zagraniu w taką grę nawet słabsi uczniowie szybko układali potrzebne wyniki. Zaskoczeni byli, że z liczb przed nimi można układać tak wiele kombinacji”.

Np. $17 = 2 \times 9 - 1$; $17 = 5 \times 5 - 8$



39. Temat lekcji: Dobra praktyka z kostką

Na podstawie pracy Ewy Wąsik oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: kostka sześcienna, ściany sześcianu, suma liczb naturalnych.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie). Uczeń:
   3) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne.

Cele kształcenia – wymagania ogólne:

II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
    Uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretuje pojęcia matematyczne i operuje obiektami matematycznymi.

III. Modelowanie matematyczne.
Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji, buduje model matematyczny danej sytuacji.
IV. Użycie i tworzenie strategii.
Uczeń stosuje strategię jasno wynikającą z treści zadania, tworzy strategię rozwiązania problemu.
V. Rozumowanie i argumentacja.
Uczeń prowadzi proste rozumowania, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania.

Rekomendacja eksperta CEO:
Uczniowie, rozwiązując wskazany problem musieli wykazać się logicznym myśleniem, wyobraźnią przestrzenną, umiejętnością szacowania i weryfikowania wyników oraz dobrze zorganizowaną współpracą w grupie.

W wersji zaproponowanej w modyfikacji do rozwiązania problemu uczniowie mogą dotrzeć częściowo drogą eksperymentalną (obserwacja), która następnie przekształca się w analizę teoretyczną. Modyfikacja pytania problemowego stwarza możliwość teoretyczną rozwiązania, a proponowana instrukcja zachęca do weryfikacji praktycznej – dyskusji rozwiązania – oraz do propozycji innej matematyzacji problemu.

Źródło:
Edward Piegat, Zbigniew Romanowicz, *100 zadań z błyskiem*, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, 2012.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy można z ośmiu jednakowych kostek sześciennych do gry złożyć sześcian o krawędzi dwa razy większej niż krawędź kostki tak, aby sumy oczek na każdej ścianie sześcianu były jednakowe i nie większe niż 8?

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Wzajemne położenie kostek.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Sumę oczek na każdej ścianie.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Liczby kostek, z których tworzymy kostkę większą.

Instrukcja do doświadczenia:

Materiały:

8 sześciennych kostek do gry.

Wykonanie:

Propozycja instrukcji dla młodszych lub mniej zaawansowanych matematycznie grup:

1. *Zbudujcie z ośmiu jednakowych sześciennych kostek do gry sześcian o dwa razy większej krawędzi.*
2. *Policzcie i zanotujcie sumy oczek na poszczególnych ściankach otrzymanego sześcianu.*
3. Wypiszcie wszystkie możliwe sumy czterech składników z zakresu 1–6 (możliwa liczba oczek na kostce), które nie przekraczają liczby 8.
4. Czy można otrzymać 6 różnych rozwiązań (sześć ścian sześcianu) tak, by żadna z liczby nie powtórzyła się więcej niż 8 razy (osiem kostek, więc co najwyżej 8 powtarzających się liczb)? Wykreślaj wykorzystane liczby ze zbioru {1,1…1,2,2,…,6,6…6}, wpisując je do tabeli.
5. Ile jest takich możliwości?
6. Jeśli istnieją teoretyczne możliwości budowy kostki, sprawdź, czy uda się to wykonać realnie?
7. Jakie inne uwarunkowania powinniśmy uwzględnić w analizie problemu?
8. Zaproponuj inny sposób analizy problemu, np. z uwzględnieniem wzajemnego położenia oczek na kostce oraz możliwości wykorzystania konkretnych trójek liczb.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:

Pierwszy etap *(kursywa w instrukcji)* można dokumentować poprzez zdjęcia wszystkich ścian ułożonych, większych kostek wraz z obliczonymi sumami.

W grupie bardziej zaawansowanej można zaproponować samodzielne poszukiwanie sposobu rozwiązania problemu – inny sposób jego matematyzacji z odstąpieniem od instrukcji zakładającej doświadczalny wstęp do analizy problemu.

W grupie mniej zaawansowanej można skorzystać z powyższej instrukcji i zaproponowanej tabeli:

Elementy do wykorzystania – liczby oczek na kostkach: I kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; II kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6 III kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; IV kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6 V kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; VI kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6 VII kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; VIII kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6						
Składniki						
Suma	4	4	4	4	4	4
Elementy do wykorzystania – liczby oczek na kostkach: I kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; II kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6 III kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; IV kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6 V kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; VI kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6 VII kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; VIII kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6						
Składniki						
Suma	5	5	5	5	5	5
Elementy do wykorzystania – liczby oczek na kostkach: I kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; II kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6 III kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; IV kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6 V kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; VI kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6 VII kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; VIII kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6						
Składniki						
Suma	6	6	6	6	6	6

Elementy do wykorzystania – liczby oczek na kostkach: I kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; II kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6 III kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; IV kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6 V kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; VI kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6 VII kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; VIII kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6						
Składniki						
Suma	7	7	7	7	7	7
Elementy do wykorzystania – liczby oczek na kostkach: I kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; II kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6 III kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; IV kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6 V kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; VI kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6 VII kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6; VIII kostka: 1, 2, 3, 4, 5, 6						
Składniki						
Suma	8	8	8	8	8	8

Propozycja modyfikacji eksperymentu eksperta CEO:
Ponieważ nauczycielka przedstawiła w sprawozdaniu jedynie szkic swej propozycji – ściśle przytaczając problem zgodnie z jego źródłowym sformułowaniem, zaproponowałem jego modyfikację pozwalającą dotrzeć do teoretycznych możliwości spełnienia warunków.

Zauważmy bowiem, że umieszczając na 6 ścianach po 4 liczby wykorzystamy 24 spośród 48 liczb. Posiłkując się jedynie najmniejszymi z nich (24 elementy), otrzymamy sumę $8 \times (1 + 2 + 3) = 48$. Gdyby zatem rozważać sumy mniejsze od 8 – na każdej ze ścian, nie otrzymamy możliwości spełnienia warunku i, tym samym, zarówno kontynuacji ciekawych badań metodą wyczerpywania, jak i praktycznej weryfikacji pojawiającej się możliwości teoretycznej.

Przekroczenie tego progu gwarantuje dalszy – ważny etap edukacji matematycznej – podążenie w kierunku matematyki stosowanej poprzez dyskusję rozwiązania w kontekście dalszych warunków realnie występujących w tym zadaniu.

Może to również zaowocować próbą dalszych badań, które w proponowanym modelu okazują się bardzo atrakcyjne dydaktycznie.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Prawidłowo wykonane doświadczanie powinno:
1) pozwolić uczniom podjąć próbę rozwiązania metodą prób i błędów z wykorzystaniem modeli kostek;
2) umożliwić poprowadzenie teoretycznej analizy możliwości rozwiązania w oparciu o:
   a) proponowaną instrukcję i sposób dokumentowania badań lub
   b) własny program badawczy;
3) zachęcić uczniów do ponownego sprawdzenia rozwiązania teoretycznego;
4) zakończyć się dyskusją rozwiązania uwzględniającą weryfikację teoretycznej i realnej możliwości ułożenia kostek.

Wybrane załączniki:
Dokumentacja fotograficzna doświadczenia

40. Temat lekcji: Ile zapałek potrzeba na zbudowanie 100 domków?

Na podstawie pracy Łukasza Mrowickiego oraz jego uczniów. Opiekun grupy uczniowskiej uczestniczył w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: mnożenie, dodawanie, wyrażenie arytmetyczne, jednomian, suma algebraiczna, wyrażenie algebraiczne.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie). Uczeń:
   4) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby wymierne.
6. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:
   1) opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami;
   2) oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych.

Rekomendacja eksperta CEO:
Doświadczenie stanowi przykład znakomitego wstępu do kształtowania pojęcia: wyrażenia algebraiczne. Warto je zrealizować w wersji podstawowej – zaproponowanej przez uczniów i koniecznie rozszerzyć w sposób zaproponowany przez autorów podręcznika. Wskazałem także przykłady innych, możliwych modyfikacji, ale ich zakres jest praktycznie nieograniczony. Ważną i prostą pomoc dydaktyczną stanowi zestaw jednakowych patyczków (mogą być zapałki), które ułatwiając wizualizację, stanowią cenny element na drodze przekształcania myślenia konkretno-pojęciowego w abstrakcyjne. Podczas doświadczania odbywa się przejście od znanych uczniom wyrażeń arytmetycznych w algebraiczne. Zaletą opisanego doświadczenia jest także dobra dokumentacja fotograficzna.

Źródło:
Uczniowie zaproponowali doświadczenie przedstawione w podręczniku matematyki do klasy pierwszej: *Matematyka z plusem*, GWO, 2008, s. 140.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Ile zapałek potrzeba na zbudowanie 100 domków?
Propozycja eksperta: A ile zapałek potrzeba do zbudowania *n* takich domków ?

Przykładowa hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Ponad pięćset.

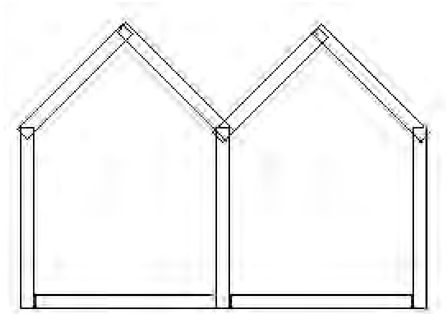
OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Liczbę domków.

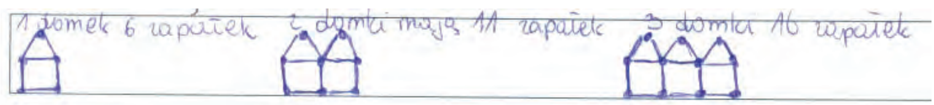
Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Liczbę zapałek.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Wszystkie domki są jednakowego kształtu i są dobudowywane wg przedstawionego schematu.

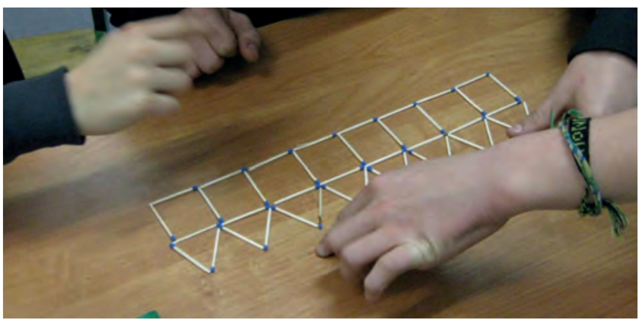
Instrukcja do doświadczenia:
Spójrz na poniższy rysunek przedstawiający zasadę budowania domków „szeregowych”, np. z zapałek. Możesz zbudować jeszcze kilka kolejnych. Zmieniając liczbę domków, sprawdzaj, jak zmienia się liczba potrzebnych do budowy zapałek. Masz do dyspozycji tylko jedno pudełko zapałek. Spróbuj rozwiązać problem sformułowany w temacie doświadczenia.



Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Uczniowie mogą rysować kolejne domki i zapisywać liczbę potrzebnych zapałek, tak jak to przedstawili w zeskanowanej karcie pracy.

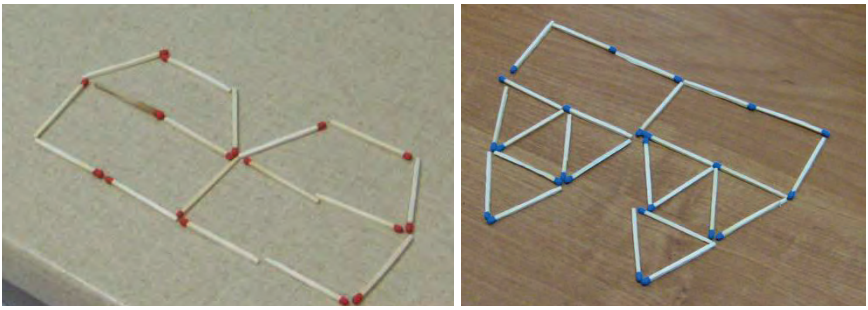


Mogą także układać domki z zapałek i oddzielnie prowadzić zapisy i obliczenia.



Następnie poddają te zapisy analizie, poszukując reguły pozwalającej im odpowiedzieć na pytania badawcze.

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Uczniowie zaproponowali modyfikację polegającą na zmianie kształtu i liczby domków, co prowadzi do potrzeby zmiany obliczeń, ale reguła jednej wspólnej ściany została zachowana, co nie będzie stanowiło znaczącego utrudnienia, a i postępu w zakresie myślenia abstrakcyjnego – prowadzącego do rozwijania myślenia abstrakcyjnego objawiającego się w matematyzacji schematu myślowego w postaci wyrażeń algebraicznych.



Istotną modyfikacją w tym zakresie jest postawienie pytania zaproponowanego w oryginale przez autorów podręcznika, które dopisałem do pytania badawczego. Warto także poszukiwać innych schematów budowy, które nie tylko zmieniają kształt obiektów, ale również zasadę – uogólnienie prowadzące do innych wyrażeń algebraicznych. Już pomysł budowy w przestrzeni trójwymiarowej (potrzebna by była do tego plastelina) będzie istotną modyfikacją. Możliwe jest także inne niż wskazane w podręczniku i przedstawione w kartach pracy spostrzeżenie: „*do zbudowania pierwszego domku potrzeba sześciu zapałek, a każdy następny wymaga pięciu*", co prowadzi do równoważnego wyrażenia $5n + 1 = 5(n - 1) + 6$ i stwarza zapotrzebowanie na umiejętność przekształcania wyrażeń algebraicznych (możliwe do natychmiastowego sprawdzenia ze względu na znajomość prawa rozdzielności mnożenia względem odejmowania).

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Prawidłowo wykonane doświadczanie powinno:
– pozwolić odkryć regułę umożliwiającą obliczenie liczby zapałek dla konkretnej liczby domków (na tyle dużej, by uczniowie odstąpili od ich budowy ze względu na brak „materiału budowlanego");
– umożliwić określenie tej reguły dla dowolnej liczby domków, gdzie dowolna liczba oznaczona jest w postaci zmiennej n,
– zachęcić uczniów do własnych modyfikacji doświadczenia.

III. Potęgi

6. Temat lekcji: Czy istnieje pierwiastek kwadratowy z liczby 2?

Podstawowe pojęcia: pierwiastek kwadratowy z liczby nieujemnej, przybliżenie liczby.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 33.

7. Temat lekcji: Ile ziaren ryżu znajdziesz na sześćdziesiątym czwartym polu szachownicy?

Podstawowe pojęcia: działania na potęgach.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 36.

22. Temat lekcji: Kulki w szklance i pierwsza kropla wody

Podstawowe pojęcia: walec, kula, liczba Pi, objętość walca, objętość kuli.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 74.

32. Temat lekcji: Liczby firankowe

Podstawowe pojęcia: potęga, wyrażenie algebraiczne, liczby firankowe.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 106.

34. Temat lekcji: Z Ziemi na Księżyc

Podstawowe pojęcia: jednostki długości i ich zamiana, działania w zbiorze liczb wymiernych, potęgi, notacja wykładnicza.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 114.

41. Temat lekcji: Suma różnych potęg liczby 2

Na podstawie pracy Beaty Dudkowiak oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Barbara Uniwersał

Podstawowe pojęcia: potęga liczby 2, suma liczb, arkusz kalkulacyjny Excel, tworzenie formuł w arkuszu, wstawianie funkcji: POTĘGA, SUMA.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

3. Potęgi. Uczeń:
   1) oblicza potęgi liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych.

Rekomendacja ekspertki CEO:
To proste doświadczenie doskonale nadaje się do pokazania wykorzystania arkusza Excel na zajęciach matematyki, chociaż jest możliwe do wykonania „na piechotę”. Gwarantuje efekt Eureki, jako że „działa” dla dowolnej liczby naturalnej – ze względu na ograniczający nas czas warto więc wybierać liczby nieprzekraczające np. 215. Pokazuje również, jak szybko rosną kolejne potęgi liczby 2.

Źródło:
Szczepan Jeleński, *Śladami Pitagorasa*, WSiP, 1988.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy można dowolną dodatnią liczbę naturalną zapisać w postaci sumy różnych potęg liczby 2?

Przykładowa hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Tak, można dowolną dodatnią liczbę naturalną zapisać w postaci sumy różnych potęg liczby 2.

OPIS DOŚWIADCZENIA

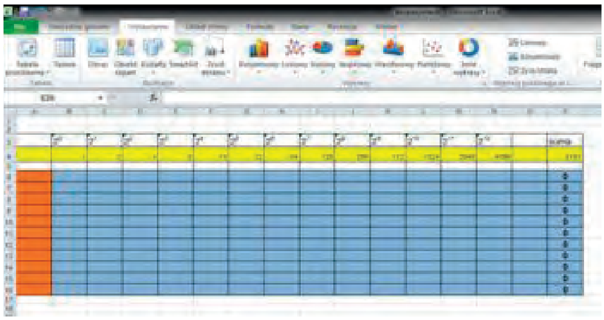
Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Wybrane liczby naturalne.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Rozkład na sumę potęg liczby 2.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Wykorzystamy tylko potęgi liczby 2.

Instrukcja do doświadczenia:
1. Włącz komputer i uruchom arkusz kalkulacyjny Excel: START → PROGRAMY → EXCEL.
2. Wpisz do wiersza 3, zaczynając od komórki B3 kolejno: 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 210, 211 , 212. Sformatuj komórki jako tekst: FORMAT → KOMÓRKI → TEKST.
3. W wierszu 4, poczynając od komórki B4 wstaw funkcję POTĘGA obliczające kolejne potęgi liczby 2: WSTAW → FUNKCJE → MATEMATYCZNE → POTĘGA albo samodzielnie obliczone wartości.
4. W komórce P4 wstaw ∑ (symbol znajduje się na pasku narzędzi) sumującą wartości z zakresu B4:O4.

5. Do komórki P6 wstaw formułę obliczającą sumy iloczynów : B6*B4+C6*C4+D6*D4+…+O6*O4. Pamiętaj, że formuły zaczynamy pisać od znaku =.
6. Skopiuj formułę i wklej ją do komórek od P7 do P16.
7. Do komórek od A6 do A16 wpisz dowolne liczby nie większe od wartości z komórki P4.
8. Do komórek z zakresu B4:O4 wpisz liczby 0 lub 1, zmieniając je tak, aby suma w komórkach kolumny P była równa liczbom, które wpisałaś/-eś w kolumnie A.
9. Sformatuj ładnie tabelę, dodając obramowanie, kolory itp.
10. Zapisz plik pod nazwą eksperyment.



Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}		
	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096		8191
342		1	1		1		1		1						**342**
907	1	1		1				1	1	1					**907**
18		1			1										**18**
5678		1	1	1		1				1	1		1		**5678**
999	1	1	1			1	1	1	1	1					**999**
666		1		1	1			1		1					**666**
333		1	1	1		1	1		1						**366**
111	1	1	1	1		1	1								**111**
754		1			1	1	1	1		1					**754**
2986		1		1		1		1	1	1		1			**2986**
5653	1		1		1					1	1		1		**5653**

Propozycja pracy domowej – możesz wiedzieć więcej:
Zadanie:
Jak wypłacić żądaną sumę, nie otwierając kopert zawierających pieniądze?

W 9 kopertach znajduje się ogółem 300 zł. W ośmiu kopertach znajdują się następująco rozłożone pieniądze:
Koperta I – 1 zł
Koperta II – 2 zł
Koperta III – 4 zł
Koperta IV – 8 zł
Koperta V – 16 zł
Koperta VI – 32 zł
Koperta VII – 64 zł
Koperta VIII – 128 zł
Koperta IX – 300 – 255 = 45 zł
Na przykład ktoś zażądał wypłaty 213 zł, ktoś inny 293. Jakie koperty należy im podać?

Z jakiej zasady, o której była mowa w eksperymencie, skorzystaliście? Przedstawcie to doświadczenie kolegom w czasie lekcji, nie wyjawiając wcześniej zawartości kopert. Gwarantuję pełne zaskoczenie.

42. Temat lekcji: Układanka z potęg i pierwiastków

Na podstawie pracy Katarzyny Kuci oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie absolwenckim „Doświadczanie pod okiem refleksyjnych praktyków" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, dr Marek Piotrowski

Podstawowe pojęcia: potęga o wykładniku całkowitym, pierwiastek kwadratowy i sześcienny.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
3. Potęgi. Uczeń:
   1) oblicza potęgi liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych;

2) zapisuje w postaci jednej potęgi: iloczyny i ilorazy potęg o takich samych podstawach, iloczyny i ilorazy potęg o takich samych wykładnikach oraz potęgę potęgi (przy wykładnikach naturalnych).
4) zamienia potęgi o wykładnikach całkowitych ujemnych na odpowiednie potęgi o wykładnikach naturalnych.

4. Pierwiastki. Uczeń:
   1) oblicza wartości pierwiastków drugiego i trzeciego stopnia z liczb, które są odpowiednio kwadratami lub sześcianami liczb wymiernych.

OPIS GRY

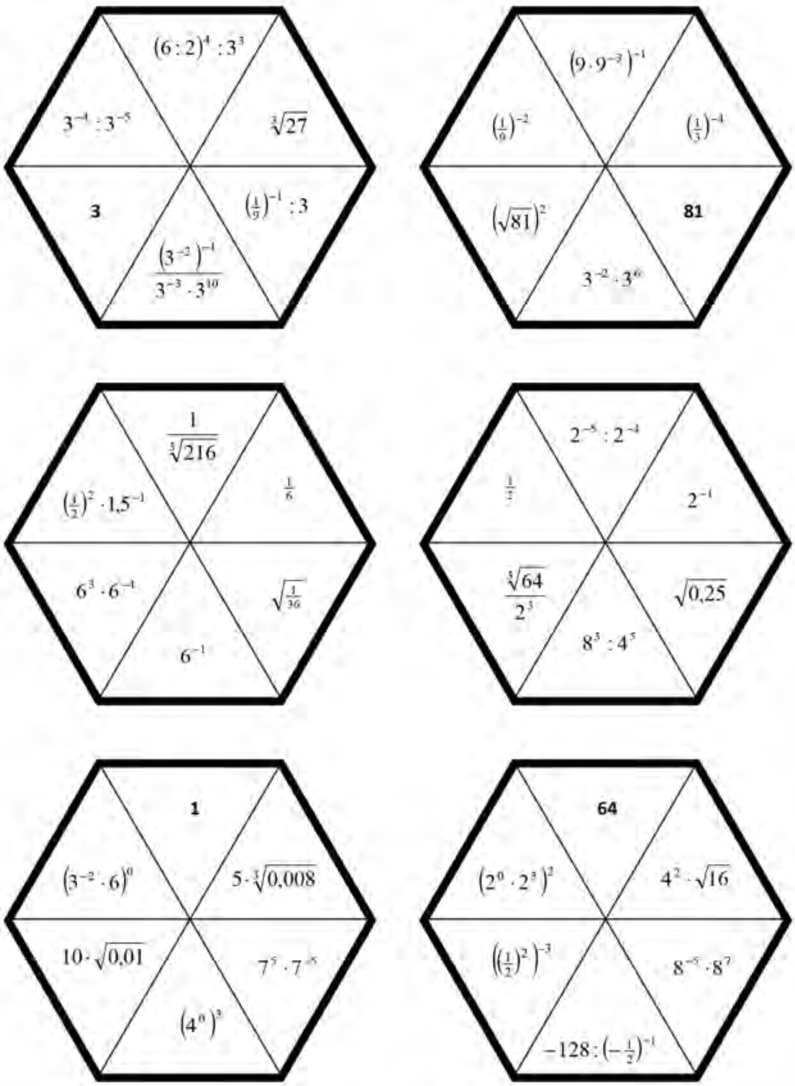
Planowane korzyści z gry:
Ćwiczenia w obliczaniu potęg i pierwiastków.

Instrukcja gry:
1. Uczniowie zostają podzieleni na 5 grup. Każda grupa otrzymuje komplet 34 karteczek w kształcie trójkątów równobocznych, na których umieszczone są działania związane z potęgowaniem i pierwiastkowaniem.
2. Zadaniem każdej grupy jest ułożenie z nich 5 sześciokątów foremnych. Każdy sześciokąt powstaje przez połączenie 6 elementów z tym samym wynikiem działania.
3. Wartości liczbowe wyrażeń na 4 kartonikach nie pasują do żadnego sześciokąta.
4. Po ułożeniu każdego sześciokąta grupy oznajmiają to nauczycielowi i on przykleja im po sprawdzeniu „zachętę”. I tak po każdym ułożonym sześciokącie.
5. Grupa, która jako pierwsza poradzi sobie z zadaniem otrzymuje oceny bardzo dobre.

Propozycja pracy domowej:
Ułóż w zeszycie jeden taki sześciokąt jak na lekcji z dowolnymi działaniami na potęgach i pierwiastkach tak, aby wynik na wszystkich kartonikach był taki sam.

Wybrane załączniki:

Kartoniki do gry



43. Temat lekcji: Gra – co jest Piotrusiem?

Na podstawie pracy Jerzego Kielecha oraz jego uczniów. Opiekun grupy uczniowskiej uczestniczył w kursie absolwenckim „Doświadczanie pod okiem refleksyjnych praktyków” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, dr Marek Piotrowski

Podstawowe pojęcia: potęga o wykładniku naturalnym.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

3. Potęgi. Uczeń:
   1) oblicza potęgi liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych;
   3) porównuje potęgi o różnych wykładnikach naturalnych i takich samych podstawach oraz porównuje potęgi o takich samych wykładnikach naturalnych i różnych dodatnich podstawach.

OPIS GRY

Planowane korzyści z gry:

- rozwijanie spostrzegawczości i organizacji danych;
- rozwijanie umiejętności współpracy w grupie podczas dążenie do wspólnego celu – wygranej;
- ćwiczenie, utrwalanie i zapamiętywanie wiadomości;
- odkrywanie reguł doboru kart w pary.

Gra kształtująca pojęcia potęgi o wykładniku naturalnym. Pozwala ćwiczyć umiejętności obliczania potęg.

Instrukcja gry:

Wybierzcie wersję gry!

I. Wersja łatwiejsza:

1. W czteroosobowych grupach rozkładacie talię 25 kart.
2. Wyszukujecie pasujące do siebie pary (odkrywacie zasady doboru w pary).
3. Ustalacie, która karta jest Piotrusiem (bez pary) – wygrywacie grę, jeśli dobrze odgadliście Piotrusia.

II. Wersja średnio trudna:

1. W parach gracie w „otwartego Piotrusia”:
   a) tasujecie i rozdajecie talię 25 kart na dwie osoby (12 i 13 kart);
   b) każdy wyrzuca ze swych kart pary po omówieniu z partnerem, czy rzeczywiście jest to para (na jakiej zasadzie, z jakiego powodu?);
   c) po wyrzuceniu par ciągniecie na przemian jedną kartę z zestawu partnera, dostrzegacie i proponujecie dla niej parę w swoim zestawie; omawiacie wspólnie, czy rzeczywiście można ją uznać za parę i odrzucić;
   d) ostatnią kartę nie do pary uznajecie „Piotrusiem” – wygrywacie grę, jeśli dobrze odgadliście Piotrusia.

III. Wersja trudniejsza (tylko dla orłów)

1. Gracie w tradycyjnego Piotrusia – każdy odpowiada za poprawność wyboru par.
2. Zostaje Wam karta nie do pary, „Piotruś” – wygrywacie grę, jeśli dobrze odgadliście Piotrusia.

IV. Wersja ekstremalnie trudna i ambitna

1. Wykonujecie zestaw 10 trudnych par w pakiecie Hot Potatoes dla partnera.
2. Partner samodzielnie łączy pary kart; na zakończenie otrzymuje informację o poprawności.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Grę powinniśmy rozegrać w 30 minut. Potem wspólnie ustalamy, co było „Piotrusiem” i wyjaśniamy strategię doboru par podczas dyskusji.

Przygotowując podobną grę w domu, nie zapomnijcie o potęgach określających przedrostki.

Wybrane załączniki:
Zdjęcie wykonane podczas przeprowadzania eksperymentu

Karty do gry

2^6	8^2	-2^0	$(-1)^7$	$\left(\frac{3}{5}\right)^6 \ldots \left(\frac{3}{5}\right)^7$
$\left(\frac{7}{6}\right)^6 \ldots \left(\frac{7}{6}\right)^5$	$\left(-\frac{3}{5}\right)^5 \ldots \left(-\frac{3}{5}\right)^7$	$(-2)^7 \ldots (-2)^6$	1^{100}	100^0
$\frac{2^3}{3}$	$2\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\frac{8}{27}$	miliard
10^9	10^6	mega	100^3	1000^2
$(-0,2)^3$	$-\frac{1}{125}$	$\left(-\frac{1}{5}\right)^2$	0,04	$[(-1)^{100}-1]^0$

44. Temat lekcji: Rozmnażanie pantofelków

Na podstawie pracy Małgorzaty Pikus oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: potęga o wykładniku naturalnym.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

3. Potęgi. Uczeń:
   1) oblicza potęgi liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Dobry pomysł na lekcję o potęgach.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Ile pantofelków będzie po 4 dobach, ile po tygodniu, ile po miesiącu?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Po 4 dobach będzie 16 pantofelków, po tygodniu 128, a po miesiącu 1024.

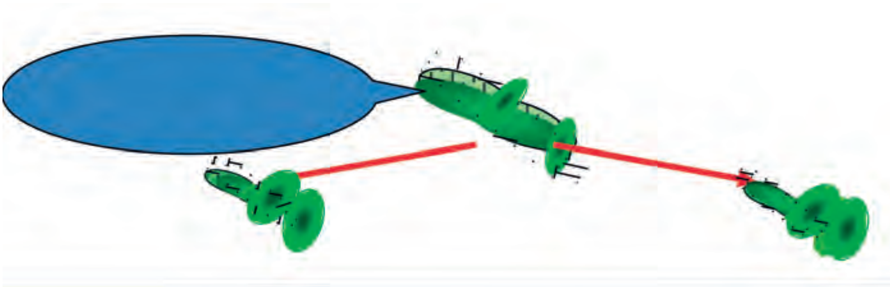
OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Liczbę dób.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Liczbę pantofelków w kolejnych dobach.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Liczby podziałów pantofelka w ciągu doby.

Instrukcja do doświadczenia:
Pantofelek to jeden z organizmów mikroskopijnych rozmnażający się przez podział. Mniej więcej co 24 godziny z jednego organizmu powstają dwa nowe osobniki.



Uczniowie mieli obliczyć, ile pantofelków będzie w zbiorniku po czterech dobach, ile po tygodniu, a ile po miesiącu? Uczniowie mieli wykonać schemat ilustrujący liczbę pantofelków w kolejnych czterech dobach oraz na podstawie tabeli zauważyć zależności i zapisać je w postaci potęg.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
1. Wykonaj schemat ilustrujący liczbę pantofelków w kolejnych czterech dobach.
2. Uzupełnij tabelę.

	1 doba	**2 doby**	**3 doby**	**4 doby**
Liczba pantofelków				
Zapis w postaci potęgi				

Wykorzystując powyższe spostrzeżenia, zapisz:
Ile pantofelków będzie po upływie tygodnia?

…………………………………………………………………………………

Ile pantofelków będzie po upływie miesiąca?

…………………………………………………………………………………

Jak to sprytnie policzyć?

…………………………………………………………………………………

45. Temat lekcji: Potęgi i pierwiastki: domino liczbowe

Na podstawie pracy Aliny Dąbrowskiej oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: potęga o wykładniku naturalnym, potęga o wykładniku całkowitym ujemnym, obliczanie pierwiastków arytmetycznych.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

3. Potęgi. Uczeń:
   1) oblicza potęgi liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych;
   2) zapisuje w postaci jednej potęgi: iloczyny i ilorazy potęg o takich samych podstawach, iloczyny i ilorazy potęg o takich samych wykładnikach oraz potęgę potęgi (przy wykładnikach naturalnych);
   3) porównuje potęgi o różnych wykładnikach naturalnych i takich samych podstawach oraz porównuje potęgi o takich samych wykładnikach naturalnych i różnych dodatnich podstawach;
   4) zamienia potęgi o wykładnikach całkowitych ujemnych na odpowiednie potęgi o wykładnikach naturalnych.

OPIS GRY

Planowane korzyści z gry:
Utrwalanie obliczeń pierwiastków i potęg o wykładniku naturalnym i całkowitym ujemnym oraz doskonalenie umiejętności pracy w grupie.

Uczniowie na lekcji przypominają sobie działania na potęgach, na co zwracać uwagę, gdy potęgujemy, w jakich przykładach najczęściej robimy błędy?

Uczniowie zostają podzieleni na 4-osobowe grupy. Każda z nich dostaje kopertę z dominem liczbowym, w której znajduje się 20 kostek domina.

Kostki należy wydrukować i skleić tak, żeby po drugiej stronie kostek znajdowały się liczby: 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, które będą służyły do sprawdzenia, czy kolejność kostek jest prawidłowa.

Pierwsza liczba na każdej z kostek (oprócz jednej) jest wynikiem działania zapisanego na innej kostce (tam, gdzie jest znak =). Za każdym razem należy połączyć działanie z jego wynikiem.

Uczniowie w grupach najpierw czytają dokładnie instrukcję, rozkładają domino i zaczynają je układać.

Instrukcja gry:
Wybierz pierwszą kostkę domina:

	$-3^2=$

Znajdź wynik potęgi $-3^2=$ … , kostkę z wynikiem ustaw obok, znajdź wynik dla kolejnej kostki. Ostatnia kostka zawiera tylko wynik z przedostatniej kostki.

Staraj się pisemnie liczyć jak najmniej.

Może zauważasz jakąś prawidłowość przy potęgowaniu niektórych liczb?

Jeżeli skończysz ustawiać kostki domina, jeszcze raz sprawdź.

Obróć teraz kostki o 1800 wzdłuż dłuższego boku.

Jeżeli koło siebie leżą liczby 0, 1, 1, 2, 2, 3, … , 20, 20, 0, to znaczy, że prawidłowo wykonałe(aś) zadanie. Gratulacje!

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
W dominie liczbowym występują potęgi, zapis liczb w postaci notacji wykładniczej, porównywanie liczb o różnych podstawach, działania na potęgach.

Znajdują się również potęgi liczb, które łatwo zapamiętać, chociaż są to liczby typu:

1112, 11112, 111112, 1111112, 11111112

Łatwo zauważyć pewną prawidłowość przy potęgowaniu tych liczb.

Aby po ułożeniu domina uczniowie mogli samodzielnie sprawdzić, czy dobrze zostały dobrane wyniki do potęg, następuje obrócenie kartek domina o 1800 względem dłuższego boku, aby każda grupa mogła, w razie błędu, znaleźć prawidłowe rozwiązanie. Z drugiej strony kartek domina są zapisane liczby, 0, 1, 1, 2, 2,.... liczby takie same powinny być koło siebie.

Wybrane załączniki:

Kostki domina

	$-3^2 =$	-9	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$	2	$2^5 - (-2)^3 =$
40	$10^3 \times 5 =$	5000	$1{,}3 \times 10^4 =$	13000	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} =$
1,5	$\frac{3^2}{9} =$	$(-234567)^0$	$1^5 - 5^0 =$	0	$2^{11} \div 2^8 =$
$2^3 =$	$111^2 =$	12321	$1111^2 =$	1234321	$(-3)^4 =$
81	$-(-3)^4 =$	-81	$32^9 =$	$2^{45} =$	$3^{-2} =$
$\frac{1}{9} =$	$2^7 + 2^7 =$	$2^8 =$	$\sqrt{144} =$	$11 + 9^0 =$	$11111^2 =$
123454321	$111111^2 =$	12345654321	$1111111^2 =$	1234567654321	

3	2	2	1	1	0
6	5	5	4	4	3
9	8	8	7	7	6
12	11	11	10	10	9
15	14	14	13	13	12
18	17	17	16	16	15
0	20	20	19	19	18

IV. Pierwiastki

6. Temat lekcji: Czy istnieje pierwiastek kwadratowy z liczby 2?

Podstawowe pojęcia: pierwiastek kwadratowy z liczby nieujemnej, przybliżenie liczby.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 33.

42. Temat lekcji: Układanka z potęg i pierwiastków

Podstawowe pojęcia: potęga o wykładniku całkowitym, pierwiastek kwadratowy i sześcienny.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: III. Potęgi, s. 147.

V. Procenty

20. Temat lekcji: Oblicz, czy prawidłowo się odżywiasz?

Podstawowe pojęcia: działania na liczbach, przeliczanie kalorii, zamiana jednostek.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 65.

26. Temat lekcji: Przepisy na drodze

Podstawowe pojęcia: zależność między drogą, czasem i prędkością; jednostki czasu, prędkości i drogi oraz ich zamiana; procent liczby.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 84.

27. Temat lekcji: Matematyczna kostka do gry

Podstawowe pojęcia: rachunek prawdopodobieństwa, statystyka opisowa, procent, diagram procentowy.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 85.

35. Temat lekcji: Giełda – gra z zastosowaniem procentów

Podstawowe pojęcia: obliczenia procentowe, zaokrąglanie liczb, działania na liczbach wymiernych, obniżka, podwyżka.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 119.

46. Temat lekcji: Czy uczniom opłaca się oszczędzać w banku?

Na podstawie pracy Anety Jankiewicz oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: procent, oprocentowanie, odsetki, lokata, zysk.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

5. Procenty. Uczeń:
   2) oblicza procent danej liczby;
   4) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, np. oblicza ceny po podwyżce lub obniżce o dany procent, wykonuje obliczenia związane z VAT, oblicza odsetki dla lokaty rocznej.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Mały projekt polegający na liczeniu zysku z lokaty. Temat pomocny uczniom w realnym życiu.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy uczniom opłaca się oszczędzać w banku? Jaka kwota zysku z lokaty byłaby dla Ciebie zadowalająca, gdybyś ulokował(a) w banku 125 zł na okres 1 miesiąca?

Przykładowa hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Warto oszczędzać w banku. Zysk w wysokości … zł byłby dla mnie zadowalający.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Uczniowie postanowili sprawdzić, czy opłaca im się oszczędzać pieniądze w banku. Zaproponowali kolegom z dwóch pozostałych grup, aby sprawdzili oprocentowanie miesięcznych lokat w trzech bankach (WBK, LUKAS BANK, ALIOR BANK). Kolejnym krokiem było obliczenie zysku, jaki przyniesie ulokowanie kieszonkowego (125 zł) w każdym z banków na okres jednego miesiąca. Uczniowie mieli zastanowić się, czy z otrzymanych kwot (zysku) byliby zadowoleni i czy ich hipoteza została potwierdzona.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Będziemy zmieniać oprocentowanie w bankach.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Będziemy obliczać ZYSK z wpłaconego do banku kieszonkowego.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Nie będziemy zmieniać kwoty wpłaconej do banku (kieszonkowe).

Instrukcja do doświadczenia:
Usiądźcie na swoich stanowiskach komputerowych. Każda z grup ma do dyspozycji trzy stanowiska. Podzielcie między sobą zadania:
- pierwsza osoba sprawdza oprocentowanie miesięczne lokaty w banku LUKAS BANK;
- druga osoba sprawdza oprocentowanie miesięczne lokaty w banku WBK;
- trzecia osoba sprawdza oprocentowanie miesięczne lokaty w banku ALIOR BANK;
- czwarta, piąta osoba notuje znalezione informacje.

Obliczcie zysk, jaki uzyskacie po ulokowaniu na miesiąc swojego kieszonkowego (125 zł) w każdym z podanych banków w karcie pracy. Zastanówcie się, czy wyniki obliczeń to są kwoty, z których bylibyście zadowoleni. Sprawdźcie poprawność swojej hipotezy.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Wyniki obliczeń uczniów można wpisać do tabeli, porównując oprocentowanie proponowane w każdym z trzech banków i zyski z niego wynikające.

47. Temat lekcji: Gra matematyczna „Procenty”

Na podstawie pracy Moniki Brodzińskiej oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: procent, procent danej liczby, liczba z danego jej procentu, podwyżka i obniżka ceny, podatek VAT, promil, oprocentowanie kredytu, kredyt, odsetki.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

5. Procenty. Uczeń:
   1) przedstawia część pewnej wielkości jako procent lub promil tej wielkości i odwrotnie;
   2) oblicza procent danej liczby;
   3) oblicza liczbę na podstawie danego jej procentu;
   4) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, np. oblicza ceny po podwyżce lub obniżce o dany procent, wykonuje obliczenia związane z VAT, oblicza odsetki dla lokaty rocznej.

Źródło:
Matematyka z plusem, dla klasy 1, 2 i 3, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2008.

OPIS GRY

Planowane korzyści z gry:
Uczeń utrwala wiadomości i umiejętności dotyczące obliczeń procentowych, rozwiązuje zadania o treści praktycznej, dotyczące podwyżek, obniżek, kredytu.

Gra dydaktyczna polegająca na rozwiązywaniu zadań o procentach. Uczniowie rzucają kostką do gry, przesuwają swój pionek na odpowiednie pole i rozwiązują wylosowane zadanie – przyporządkowane temu polu. Wygrywa ten uczeń, który pierwszy dotrze do mety.

Wybrane załączniki:
Zestaw zadań

80% uczniów 20-osobowej klasy nie gra na żadnym instrumencie. Ile osób utworzyłoby klasowy zespół instrumentalny?	Podaj stawkę 22% VAT-u od kwoty 250 zł	Jaki procent powierzchni polskiej flagi zajmuje część czerwona?	Jaki procent wszystkich liter w wyrazie MATEMATYKA stanowi litera A?
Zamień ułamek 3,51 na procent	Przedstaw 17% w postaci ułamka	Przedstaw 42 w postaci promila	Jaka to liczba, której 20% stanowi 16?
Jakim procentem liczby 40 jest liczba 50?	Cenę towaru obniżono o 75%. Jakim procentem starej ceny jest nowa cena?	Oblicz 75% powierzchni prostokąta o wymiarach 6 dm x 8 dm.	Jaki procent 200 zł stanowi 14 zł?
Jaki procent 48 groszy stanowi 6 groszy ?	Cenę książki wynoszącą 58 złotych podwyższono o 5%. O ile więcej zapłacimy, kupując tę książkę?	Cenę towaru wynoszącą 125 zł obniżono o 40%. O jaką kwotę obniżono cenę towaru?	Oblicz 150% z 300 kg
Jaką częścią wielkości jest 1%?	Oblicz 10% z 65	Oblicz 30% z 620 litrów, wynik podaj w dm^3	Zamień 120% na promil
Załadowany tir waży 20 000 kg. 80% jego ciężaru stanowi ładunek. Ile waży sama ciężarówka?	Miedziana lampa waży 75 kg. 45% stopu, z którego jest wykonana to cynk, a resztę stanowi miedź. Ile kg miedzi potrzeba do wykonania tej lampy?	Waga kontenera na śmieci jest równa 8% wagi jego zawartości. Ile waży kontener, jeżeli śmieci ważą 275 kg?	Cena kurtki była równa 160 złotych, obniżono ją o 15%. Ile wynosi cena kurtki po obniżce?
Państwo Kowalscy w ubiegłym miesiącu wydali 55% swoich dochodów na żywność, 25% na stałe opłaty. Jaki procent dochodów został im na inne wydatki?	Pan Kowalski wpłacił do banku 40 000 zł na rok, gdzie oprocentowanie w skali roku wynosiło 15%. Oblicz, ile wyniosą jego odsetki.	Na 30 pytań testowych uczeń udzielił 21 poprawnych odpowiedzi. Jaki procent wszystkich odpowiedzi ucznia stanowiły odpowiedzi poprawne?	W klasie liczącej 35 osób 40% stanowią dziewczęta. Ilu chłopców jest w tej klasie?

Koło podzielono na 10 równych części, z czego 4 zamalowano. Jaki procent koła został zamalowany?	Określ, co jest większe: 0,27 ceny czy 20% tej ceny?	Jaki procent masy 200 kg stanowi masa 240 kg?	Przez 18 dni listopada padał deszcz. Jaki procent liczby dni listopada stanowiły dni deszczowe?
Zebrano 24 kg jabłek, jednak 9 kg tych owoców było zgniłych. Jaki procent zbioru nadawał się do spożycia?	Węglowodany stanowią 57% masła orzechowego. Jaka jest masa węglowodanów zawartych w 400 g takiego masła?	Kosiarka do trawy kosztowała 750 zł. Teraz jest tańsza i kosztuje 600 zł. O ile procent obniżono cenę kosiarki?	Lodówka kosztowała 1150 zł. Przeceniono ją o 12%. Ile kosztuje teraz?
Jaka to liczba, której 3% stanowi 12?	Cenę żyrandola obniżono o 15% i obecnie wynosi ona 272 zł. Ile kosztował ten żyrandol przed obniżką?	Nowa wersja filmu jest o 9 minut krótsza od wersji oryginalnej. Ile minut trwała wersja oryginalna, jeśli skrócono ją o 12%?	Szkolna wycieczka złożona z 544 osób wypełniła salę teatru w 85%. Ile miejsc jest w teatrze?
W klasie jest 25 dziewcząt i 20 chłopców. O ile procent więcej jest dziewcząt niż chłopców?	Andrzej ma do szkoły 700 metrów, a Kasia kilometr. O ile procent bliżej ma do szkoły Andrzej niż Kasia?	Zarobki mamy Staszka stanowią 40% dochodów rodziców, a jego tata zarabia 1320 zł. Ile łącznie zarabiają jego rodzice?	Określ, co jest większe: 1/3 pola czy 30% tego pola?

Objaśnienia symboli

 Losujesz dwie karty z pytaniami. Jeśli podasz poprawne odpowiedzi na dwa pytania, masz dodatkowy rzut kostką. Jeśli poprawnie odpowiesz na jedno pytanie, pozostajesz na swoim miejscu. Jeżeli podasz dwie błędne odpowiedzi, wracasz na START.

 Losujesz jedną kartkę z pytaniem. Jeśli podasz poprawną odpowiedź, masz dodatkowy rzut.

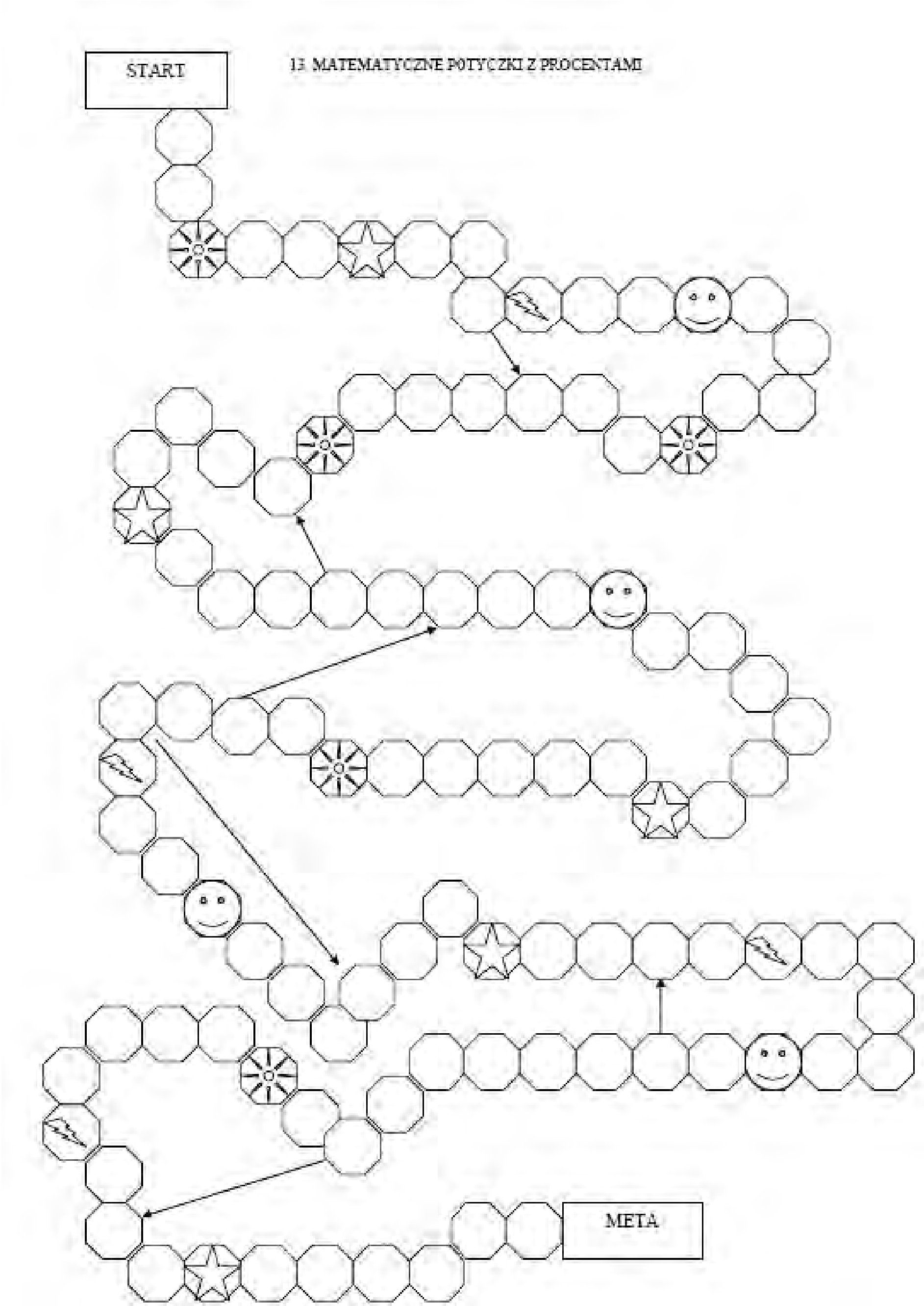
 Przesuwasz pionek na pole, które pokazuje strzałka.

 Losujesz jedną kartę z pytaniem. Jeśli podasz poprawną odpowiedź, przesuwasz pionek o 6 pól do przodu.

 Przesuwasz pionek na pole, które pokazuje strzałka.

 Tracisz kolejkę rzutu.

Plansza do gry



48. Temat lekcji: Jak najkorzystniej wybrać lokatę bankową?

Na podstawie pracy Renaty Kozdoj oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: lokata, oprocentowanie, odsetki, kapitał, kapitalizacja odsetek, roczna stopa procentowa, okres obrachunkowy, podatek.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

5. Procenty. Uczeń:
   2) oblicza procent danej liczby;
   4) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, np. oblicza ceny po podwyżce lub obniżce o dany procent, wykonuje obliczenia związane z VAT, oblicza odsetki dla lokaty rocznej.

Rekomendacja eksperta CEO:
Uczniowie wykorzystują procenty w typowej sytuacji Kowalskiego. Poznają zasady kapitalizacji odsetek z różną częstością i walory procentu składanego.

Źródło:
Scenariusz jest autorstwa nauczycielki, jedynie ulotki reklamowe banków były wzorowane na ulotkach z zadania z podręcznika do klasy 1: Ewa Duvnjak, Ewa Kokiernak-Jurkiewicz, Maria Wójcicka, *Matematyka wokół nas*, WSIP, Warszawa 2008 (wykorzystano te same nazwy banków i formę ulotki, zmieniono tylko dane).

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Jak najkorzystniej wybrać lokatę bankową?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Najkorzystniej będzie ulokować w „Banku Denar”, bo daje najwyższe odsetki.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Oprocentowanie, rodzaj kapitalizacji.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Kapitał końcowy.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Kapitału początkowego.

Instrukcja do doświadczenia:
Wybieramy trzech uczniów jako przedstawicieli banków – bankierów. Pozostali uczniowie zostają podzieleni na 5-osobowe zespoły. Nauczyciel omawia mechanizm działania lokaty bankowej.

Instrukcja dla ucznia:
Celem waszego zadania będzie zainwestowanie wirtualnej kwoty 1500 zł na jedną z lokat na okres 2 lat i zweryfikowanie, czy dokonaliście korzystnego wyboru.

1. Podzielcie się zadaniami:
   łącznik – osoba będąca łącznikiem między bankiem a grupą,
   księgowy – osoba wykonująca obliczenia,
   zastępca księgowego – osoba sprawdzająca poprawność obliczeń,
   mówca – osoba prezentująca wnioski z doświadczenia na forum klasy,
   pisarz – osoba uzupełniająca kartę pracy.
2. Łącznik odwiedza 3 banki, gdzie przedstawiciele – bankierzy prezentują mu ofertę lokaty swojego banku. Łącznik wraca do grupy z ulotkami reklamowymi różnych lokat.
3. Grupy inwestycyjne dokonują wyboru najkorzystniejszej ich zdaniem lokaty.
4. Po podjęciu decyzji każda grupa, korzystając z kalkulatorów, oblicza kapitał końcowy dla wszystkich lokat (nie uwzględniając podatku od odsetek).
5. Po dokonaniu obliczeń łącznicy udają się do banków, gdzie bankierzy weryfikują poprawność ich wyliczeń.
6. Grupy porównują wyniki ze swoją hipotezą i zapisują wnioski.
7. Mówcy prezentują wnioski z doświadczenia na forum klasy.

Bank TALAR	Bank GROSIK	Bank DENAR
Oferujemy oprocentowanie 12,1% w skali rocznej i półroczną kapitalizację odsetek.	NAJLEPSZA LOKATA!!! 12% w skali rocznej z kwartalną kapitalizacją.	Tylko u nas 12,2% w skali rocznej. Roczna kapitalizacja odsetek.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Obliczenia uczniowskie.

Propozycja pracy domowej:
Dla lokaty w banku TALAR oblicz kapitał końcowy, zmniejszając go o 20% podatku od naliczonych odsetek.

49. Temat lekcji: Czy niższe oprocentowanie oznacza mniejszy zysk? Czy długość trwania lokaty ma wpływ na stan konta po upływie okresu oszczędzania?

Na podstawie pracy Wiesławy Szurnickiej oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: procent danej liczby, lokata, lokata odnawialna, odsetki od lokaty.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

5. Procenty. Uczeń:
   4) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, np. oblicza ceny po podwyżce lub obniżce o dany procent, wykonuje obliczenia związane z VAT, oblicza odsetki dla lokaty rocznej.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Pomysł na zastosowanie procentów w obliczaniu zysków na lokatach bankowych.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy niższe oprocentowanie oznacza mniejszy zysk?

Czy długość trwania lokaty ma wpływ na stan konta po upływie okresu oszczędzania?

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Długość trwania lokaty i oprocentowanie.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Stan konta po upływie okresu oszczędzania.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Początkowego stanu konta.

Instrukcja do doświadczenia:
Doświadczenie polegało na sprawdzeniu rachunkowym, czy wyższe oprocentowanie lokaty zawsze daje największy zysk oraz czy długość trwania lokaty ma wpływ na stan oszczędności na końcu okresu oszczędzania. Uczniowie mieli za zadanie policzyć stan kont umieszczonych w różnych bankach na lokatach różnie oprocentowanych i o różnej długości trwania.

Uwaga! Konieczne jest użycie kalkulatorów ze względu na czasochłonność obliczeń.

Podano cztery możliwości:
a) 6-miesięczna odnawialna lokata – oprocentowanie 9,8% w skali roku;
b) 3-miesięczna odnawialna lokata – oprocentowanie 9,6% w skali roku;
c) roczna odnawialna lokata – oprocentowanie 10%;
d) dwuletnia odnawialna lokata – oprocentowanie 10,2% w skali roku.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Wyniki obliczeń można zestawić w tabeli.

50. Temat lekcji: Która podwyżka jest większa: jednorazowa o 65% czy trzykrotna po 20%?

Na podstawie pracy Moniki Kuzi oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: procent, podwyżka, procent danej liczby.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

5. Procenty. Uczeń:
   2) oblicza procent danej liczby;
   4) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, np. oblicza ceny po podwyżce lub obniżce o dany procent, wykonuje obliczenia związane z VAT, oblicza odsetki dla lokaty rocznej.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Uczniowie mogą postawić (intuicyjnie) mylną hipotezę, więc efekt Eureki jest zapewniony. Dodatkowo uczniowie uczą się wykorzystania procentów w obliczeniach, ćwiczą rachowanie i uogólniają wnioski (wykonując obliczenia w stosunku do produktu o cenie – *x* zł).

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Która podwyżka jest większa: jednorazowa o 65% czy trzykrotna po 20%?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Podwyżka jednokrotna o 65% będzie wyższa.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Uczniowie pracowali w grupach. Każda grupa otrzymała takie samo zadanie do wykonania. Zadaniem uczniów było obliczenie cen trzech produktów po jednokrotnej podwyżce o 65% i trzykrotnej podwyżce o 20%. Uczniowie wykonali bardzo dokładną dokumentację uczniowską, która pozwoliła innym uczniom odpowiedzieć na pytanie postawione w temacie.

Jako trzy produkty podano: długopis – 6 zł; czajnik – 120 zł; prezent – *x* zł.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Ceny początkowe produktów.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Ceny produktów po podwyżkach.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Podwyżki jednorazowej o 65% i trzykrotnej o 20%.

Instrukcja do doświadczenia:
1. Zapoznajcie się z cenami trzech produktów.
2. Obliczcie ceny trzech produktów po podwyżce o 65%.
3. Obliczcie ceny trzech produktów po trzykrotnej podwyżce o 20%.
4. Zapiszcie obliczenia i wyniki swoich badań w tabelach.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:

Nazwa przedmiotu	Cena przedmiotu	Cena przedmiotu po podwyżce o 65%
Długopis		
Czajnik		
Prezent		

Nazwa przedmiotu	Cena przedmiotu	Cena przedmiotu po pierwszej podwyżce o 20%	Cena przedmiotu po drugiej podwyżce o 20%	Cena przedmiotu po trzeciej podwyżce o 20%
Długopis				
Czajnik				
Prezent				

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Która obniżka jest większa: jednorazowa o 65% czy trzykrotna po 20%?

VI. Wyrażenia algebraiczne

8. Temat lekcji: Co to jest BMI i jakie jest prawidłowe BMI dla osoby w moim wieku?

Podstawowe pojęcia: BMI, niedowaga, nadwaga, otyłość.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 38.

15. Temat lekcji: Budujemy liczby trójkątne

Podstawowe pojęcia: liczba naturalna, suma, wyrażenie algebraiczne, wartość liczbowa wyrażenia algebraicznego.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 53.

26. Temat lekcji: Przepisy na drodze

Podstawowe pojęcia: zależność między drogą, czasem i prędkością; jednostki czasu, prędkości i drogi oraz ich zamiana; procent liczby.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 84.

32. Temat lekcji: Liczby firankowe

Podstawowe pojęcia: potęga, wyrażenie algebraiczne, liczby firankowe.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 106.

40. Temat lekcji: Ile zapałek potrzeba na zbudowanie 100 domków?

Podstawowe pojęcia: mnożenie, dodawanie, wyrażenia arytmetyczne, jednomian, suma algebraiczna, wyrażenia algebraiczne.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: II. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie), s. 138.

51. Temat lekcji: Czy suma pól księżyców Hipokratesa kwadratu równa jest polu tego kwadratu?

Na podstawie pracy uczniów pod opieką Włodzimierza Gapskiego. Opiekun grupy uczniowskiej uczestniczył w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: Księżyce Hipokratesa, okrąg, koło, pole koła, kwadrat, przekątna kwadratu, okrąg wpisany w wielokąt, okrąg opisany na wielokącie.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

6. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:
   1) opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami;

3) redukuje wyrazy podobne w sumie algebraicznej;
4) dodaje i odejmuje sumy algebraiczne;
5) mnoży jednomiany, mnoży sumę algebraiczną przez jednomian oraz, w nietrudnych przykładach, mnoży sumy algebraiczne;
6) wyłącza wspólny czynnik z wyrazów sumy algebraicznej poza nawias;
7) wyznacza wskazaną wielkość z podanych wzorów, w tym geometrycznych i fizycznych.

7. Równania. Uczeń:
   1) zapisuje związki między wielkościami za pomocą równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą (…);
   3) rozwiązuje równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.

10. Figury płaskie. Uczeń:
   6) oblicza pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego;
   19) konstruuje symetralną odcinka i dwusieczną kąta;
   22) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności.

Rekomendacja eksperta CEO:
Znakomity przykład zajęć z pytaniem problemowym i interesującym pojęciem „Księżyce Hipokratesa”. Można poprowadzić je jako klasyczne doświadczenie empiryczne, zmierzające do przeprowadzenia dowodu matematycznego. Propozycja zajęć daje możliwość przećwiczenia konstrukcji geometrycznych.

Źródło:
Urszula Sawicka-Patrzałek, Jolanta Walczak, *Matematyka 2001. Zadania. Suplement. Klasa II*, WSiP.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy suma pól księżyców Hipokratesa kwadratu równa jest polu tego kwadratu?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Uczniowie na początku zajęć wypowiadają się, czy ich zdaniem suma pól księżyców Hipokratesa kwadratu równa jest polu tego kwadratu, czy może jest większa lub mniejsza od pola tego kwadratu.

OPIS DOŚWIADCZENIA

W pierwszej części zajęć można przedstawić uczniom podstawowe informacje na temat księżyców Hipokratesa i omówić zasady ich konstrukcji na przykładzie trójkąta równobocznego. Przykładowy rysunek należy wykonać na tablicy.

W części drugiej uczniowie realizują doświadczenie w małych zespołach. Rozwiązują problem zawarty w temacie zajęć w celu weryfikacji sformułowanej uprzednio hipotezy. Zespół uczniowski, który pierwszy rozwiąże problem może przedstawić i omówić wyniki swojej pracy, wykonując odpowiedni rysunek i zapisując potrzebne obliczenia na tablicy.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Długość boku kwadratu.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Pola księżyców Hipokratesa.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Pola kwadratu, które zależy od długości boku.

Uwaga eksperta:
Jeśli zmienną niezależną jest długość boku kwadratu, powstaje pewna trudność związana z rozumieniem eksperymentu w sensie proponowanym przez Akademię uczniowską. Nacisk jest tu kładziony na „doświadczenie myślowe", którego dokumentacją są obliczenia ogólne – zamiast konkretnego kwadratu, np. o boku długości 4 cm – uczniowie prowadzą rozumowanie ogólne, co stanowi różnicę między empirycznym matematycznie eksperymentem a takim, który wyróżnia się jako „zajęcia z pytaniem problemowym". Dlatego myślę, by, w przypadku uczniów słabszych, zaproponować im konkretne obliczenia – inną, ale całkowitą długość boku dla każdej grupy – a następnie dyskusję nad efektem ich obliczeń (sama konstrukcja, obok innych walorów dydaktycznych, jest narzędziem wizualizacji ułatwiającej powstanie koncepcji rozwiązania). Następnie prezentacja wyników obliczeń sprawia, że dochodzimy do podejrzenia, iż prawidłowość zachodzi dla dowolnego boku (patrz zmienna niezależna) i jednocześnie powstaje potrzeba przeprowadzenia dowodu, którym w tym wypadku będą waśnie obliczenia ogólne.

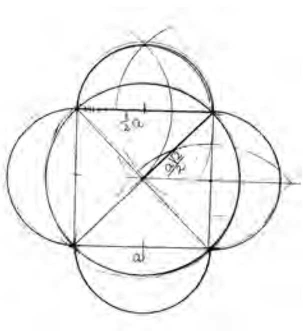
Instrukcja do doświadczenia:
Pracując w grupach, uczniowie powinni wybrać ze swego grona osobę odpowiedzialną za wykonanie rysunku i inną, odpowiedzialną za sporządzanie notatek.

1. Na podstawie rysunku wykonanego na tablicy skonstruuj księżyce Hipokratesa dla trójkąta równobocznego.
2. Przeprowadź podobną konstrukcję dla kwadratu o boku *a*:
   - narysuj dowolny kwadrat o boku *a*,
   - wyznacz środek okręgu opisanego na tym kwadracie i narysuj ten okrąg,
   - wyznacz środek każdego z boków kwadratu,
   - na każdym z boków kwadratu narysuj półokrąg o promieniu równym połowie długości boku kwadratu.

3. Sformułuj odpowiedź na pytanie problemowe.
4. Zastanów się, w jaki sposób obliczyć pole pojedynczego księżyca Hipokratesa.
5. Oblicz pola księżyców Hipokratesa dla kwadratu.
6. Porównaj obliczoną sumę pól wszystkich księżyców z polem kwadratu.
7. Sprawdź poprawność postawionej hipotezy.

BHP:
Zachowaj ostrożność przy posługiwaniu się przyborami geometrycznymi, szczególnie cyrklem!

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:



$$P_O = \pi r^2$$
$$P_O = \pi\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2$$
$$P_O = \pi\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)$$
$$P_O = \frac{1}{2}\pi a^2$$
$$P_{ks} = \frac{1}{8}\pi a^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\pi a^2 - a^2\right)$$
$$P_{ks} = \frac{1}{8}\pi a^2 - \frac{1}{8}\pi a^2 + \frac{1}{4}a^2$$
$$P_{ks} = \frac{1}{4}a^2$$

$$P_k = a^2$$
$$P_O - P_k = \frac{1}{2}\pi a^2 - a^2$$
$$PD = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2$$
$$P_D = \frac{1}{8}\pi a^2$$
$$4P_{ks} = 4\frac{1}{4}a^2$$
$$4P_{ks} = a^2 = P_k$$

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Inny pomysł to określenie zmiennej niezależnej jako liczby n ujmującej liczbę boków n-kąta foremnego, dla którego powstają księżyce i pytanie, czy taka prawidłowość zachodzi dla dowolnego wielokąta foremnego? To pytanie może przekraczać możliwości gimnazjalisty, ale ograniczone do n = 3, 4, 6 daje szansę klasycznej zmiany zmiennej zależnej, a w przypadku ogólnym prowadzi do wyzwania na przyszłość – modelując ciekawość poznawczą.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Prawidłowo wykonane doświadczanie powinno pozytywnie zweryfikować hipotezę *TAK*, np. według wzoru pokazanego w przytoczonej dokumentacji uczniowskiej. Warto, by kończyło się zaproponowaną pracą domową: skonstruuj księżyce Hipokratesa dla sześciokąta foremnego. Można także zachęcić uczniów do sprawdzenia, czy odpowiedź na pytanie badawcze dla sześciokąta foremnego byłaby analogiczna.

52. Temat lekcji: Kwadrat magiczny inaczej

Na podstawie pracy Małgorzaty Joniec oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Włodzimierz Gapski

Podstawowe pojęcia: kwadrat magiczny, suma algebraiczna, redukcja wyrazów podobnych.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

6. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:
   3) redukuje wyrazy podobne w sumie algebraicznej;
   4) dodaje i odejmuje sumy algebraiczne.

Rekomendacja eksperta CEO:
Ciekawa propozycja wykorzystania kwadratu magicznego do ćwiczenia umiejętności związanych z dodawaniem sum algebraicznych i redukcją wyrazów podobnych. Dobry pomysł na ćwiczenie i utrwalanie umiejętności związanych z realizacją treści programowych z działu „Wyrażenia algebraiczne”.

Źródło:
Praca zbiorowa pod redakcją Małgorzaty Dobrowolskiej, *Matematyka z plusem* – podręcznik do kl. I, wyd. Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2008 (dział – wyrażenia algebraiczne, zad. 6/151).

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy podane kwadraty są kwadratami magicznymi?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Uważamy, że oba kwadraty nie są magiczne.

Podstawowe pojęcia:
Kwadrat magiczny – w kwadracie magicznym sumy wyrazów w każdym wierszu, w każdej kolumnie oraz na przekątnych są równe.

Suma algebraiczna – wyrażenie algebraiczne, które powstaje przez dodawanie jednomianów.

Redukcja wyrazów podobnych – dodawanie jednomianów podobnych, czyli takich, które mają takie same czynniki literowe.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Wyrażenia algebraiczne wpisane w poszczególne komórki kwadratu.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Sumy wyrazów w każdym wierszu, w każdej kolumnie oraz na przekątnych.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Sum algebraicznych w kwadratach magicznych.

Instrukcja do doświadczenia:
Pomoce: dwa kwadraty magiczne, kartka, długopis.

Sprawdźcie, czy podane poniżej kwadraty są kwadratami magicznymi. Obliczenia wykonujcie pisemnie na kartkach.

6-a	5-3a	a+4
a+3	5-a	7-3a
6-3a	a+5	4-a

2x-1	4x-2	x+1
2x-2	2x+1	3x-1
3x+1	x-1	3x-2

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Obliczenia wykonywane przez uczniów.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Większość uczniów po raz pierwszy spotka się z czymś takim jak magiczny kwadrat. Dla niektórych z nich wyrażenia algebraiczne kojarzą się z czymś trudnym. Podczas tego doświadczenia zdają sobie sprawę, że nie tylko jest to łatwe, ale że również można fajnie bawić się wyrażeniami algebraicznymi.

Kwadraty magiczne można stosować w różnych działach matematyki. Za ich pomocą można ćwiczyć i sprawdzać umiejętność potęgowania, pierwiastkowania, obliczeń procentowych.

Komentarz eksperta:
W przypadku prezentowanego doświadczenia uzyskanie efektu Eureki wiązało się z poznaniem pojęcia magicznego kwadratu i wykorzystaniem go, jako narzędzia, do nauki „nudnych" wyrażeń algebraicznych przez zabawę. To cenne spostrzeżenia, o których warto pamiętać. Zgodnie z sugestią prowadzącej zajęcia nauczycielki kwadraty magiczne możemy wykorzystać podczas nauczania różnych treści programowych. W przypadku ćwiczenia działań na liczbach dodawanie można zastąpić odejmowaniem, mnożeniem, potęgowaniem.

Warto na początku zajęć wytłumaczyć uczniom, co to jest kwadrat magiczny, gdyż to pojęcie, jak się okazuje, nie jest znane wszystkim uczniom.

Uczestniczący w zajęciach uczniowie odpowiadali krótko TAK lub NIE na pytanie o to, czy przykładowe kwadraty są magiczne. Poprawność sformułowanej hipotezy weryfikowali poprzez dodawanie prostych sum algebraicznych. Myślę, że warto zmodyfikować doświadczenia w taki sposób, aby uczniowie zostali zmuszeni do opracowania strategii rozwiązania problemu, a nie tylko wykonywali wskazane działania. Na przykład można przygotować kwadrat z lukami, w które uczniowie powinni wpisać takie wyrażenia, aby kwadrat stał się magiczny. Inne przykłady mogą nawiązywać do własności kwadratów magicznych, podobnych do działań na macierzach. Uczniowie mogą sprawdzać, czy suma i różnica dwóch kwadratów magicznych jest kwadratem magicznym lub czy jeżeli do każdego elementu dodamy lub odejmiemy takie same wyrażenie lub liczbę, to otrzymamy kwadrat magiczny. Przy okazji warto zastanowić się nad tym, jak zmieniają się sumy w powstałych w wyniku powyższych działań kwadratach.

53. Temat lekcji: Jak szybko zużyjesz mydło, jeśli po tygodniu wszystkie jego wymiary zmniejszyły się do połowy?

Na podstawie pracy Moniki Kuzi oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: prostopadłościan, objętość prostopadłościanu.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

11. Bryły. Uczeń:
    2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).
6. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:
    1) opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami;
    5) mnoży jednomiany, mnoży sumę algebraiczną przez jednomian oraz, w nietrudnych przykładach, mnoży sumy algebraiczne.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Doświadczenie nawiązuje do życia codziennego i nie jest trudne do wykonania na zajęciach.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Mydło, które masz w toalecie ma kształt prostopadłościanu. Używasz go co dzień równomiernie. W ciągu 7 dni wszystkie jego wymiary zmniejszyły się do połowy (zmydliło się). Na ile dni wystarczy jeszcze tego mydła, jeżeli będziesz nadal używał go tak samo intensywnie?

Przykładowa hipoteza zaproponowana przez uczniów:
7 dni.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zadaniem uczniów było obliczenie, na ile dni wystarczy mydła w kształcie prostopadłościanu, gdy po 7 dniach używania jego wymiary zmniejszyły się do połowy. Uczniowie wykonali bardzo dokładną dokumentację uczniowską, która pozwoliła innym uczniom odpowiedzieć na pytanie postawione w temacie. W zadaniu można było podać wymiary mydła.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Wymiary prostopadłościanu.

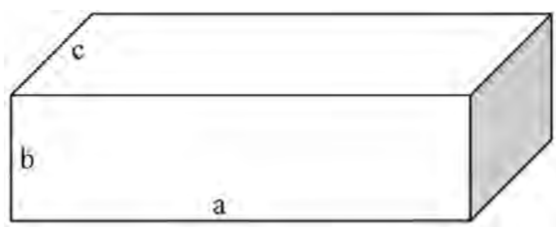
Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Objętość mydła w kształcie prostopadłościanu.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Intensywności zużycia mydła.

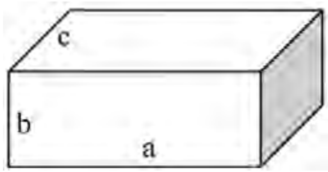
Instrukcja do doświadczenia:
Zajęcia prowadzimy w grupach. Każda grupa otrzymuje takie samo zadanie do rozwiązania.

1. Na rysunku 2 (poniżej) zapisz wymiary mydła po 7 dniach używania.
2. Oblicz objętość mydła w kształcie prostopadłościanu przed użyciem (objętość prostopadłościanu jest równa iloczynowi jego wymiarów: długość × szerokość × wysokość).
3. Oblicz objętość mydła pozostałą po 7 dniach.
4. Oblicz objętość mydła zużytego w ciągu 7 dni.
5. Oblicz objętość mydła zużywanego w ciągu jednego dnia.
6. Podaj, na ile dni wystarczy jeszcze mydła. Swoje obliczenia i wyniki zapisz w tabeli.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:



Rys. 1. Wymiary mydła przed użyciem



Rys. 2. Wymiary mydła po 7 dniach używania

Jaka jest objętość mydła przed użyciem?	
Jaka jest objętość mydła po 7 dniach używania?	
Jaka jest objętość mydła zużytego w ciągu 7 dni?	
Jaka jest objętość mydła zużytego w ciągu jednego dnia?	
Na ile dni wystarczy jeszcze mydła?	

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
O ile procent zmniejszyła się objętość mydła po 7 dniach używania?

54. Temat lekcji: Ile potrzeba zapałek, by zbudować 1000 trójkątów?

Na podstawie pracy Grzegorza Karczewskiego oraz jego uczniów. Opiekun grupy uczniowskiej uczestniczył w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Barbara Uniwersał

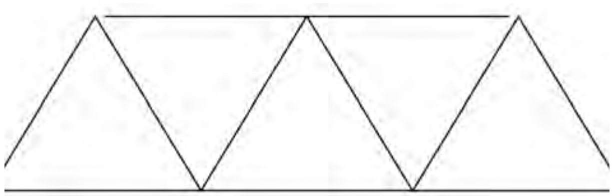
Podstawowe pojęcia: wyrażenie arytmetyczne, wyrażenie algebraiczne, liczby naturalne, dodawanie i mnożenie liczb naturalnych, szacowanie.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

6. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:
   1) opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami;
   2) oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Zajęcia są proste do zrealizowania w każdych warunkach. Przybliżają uczniom wyrażenia algebraiczne, często będące kompletną abstrakcją. Tu widać dokładnie, jak przełożyć wyrażenie algebraiczne na coś znanego uczniom. Można też wprowadzić pojęcie rekurencji, niepotrzebne w gimnazjum, ale interesujące.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Ile potrzeba zapałek, aby zbudować 1000 trójkątów równobocznych, z których każde dwa sąsiednie mają wspólny bok (patrz rysunek).



OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Liczbę ułożonych figur.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Liczbę użytych zapałek.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Długości zapałek.

Instrukcja do doświadczenia:
Należy przygotować 3 pudełka zapałek, żeby było ich dużo i wystarczyło do przeprowadzenia doświadczenia.

Układamy kilka początkowych trójkątów i zapisujemy liczbę użytych zapałek.

Liczba trójkątów: 1 2 3 4 5 …

Liczba zapałek: 3 5 7 9 11 …

Uczniowie próbują znaleźć zależność liczby zapałek od liczby trójkątów. Jeżeli będą mieli problemy, wtedy można podać im regułę dla pierwszej figury, w razie potrzeby drugiej i kolejnej.

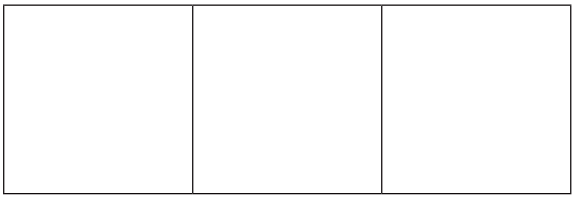
Prosimy, by podali wzory na liczbę zapałek dla „*n*” trójkątów.

Następnie mają obliczyć liczbę zapałek potrzebną do ułożenia 1000 trójkątów.

BHP:
Należy uważać, by uczniowie nie zapalali zapałek.

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Ile zapałek potrzeba, żeby zbudować 1000 takich kwadratów?

Prosimy uczniów, by wykonali te same czynności, jak przy trójkątach, przy układaniu kwadratów.



55. Temat lekcji: Czy można huśtać się ze słoniem?

Na podstawie pracy Joanny Herman i jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Włodzimierz Gapski

Podstawowe pojęcia: proporcja, prawo dźwigni dwustronnej.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
Matematyka
7. Równania. Uczeń:
   1) zapisuje związki między wielkościami za pomocą równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym związki między wielkościami wprost proporcjonalnymi i odwrotnie proporcjonalnymi;

3) rozwiązuje równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.
6. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:
   7) wyznacza wskazaną wielkość z podanych wzorów, w tym geometrycznych i fizycznych.

Fizyka

1. Ruch prostoliniowy i siły. Uczeń:
   11) wyjaśnia zasadę działania dźwigni dwustronnej, bloku nieruchomego, kołowrotu.

Rekomendacja eksperta CEO:
Zaproponowany przez uczniów eksperyment fizyczny służący do zilustrowania i wyjaśnienia pojęcia matematycznego (proporcjonalność odwrotna) to oryginalny i interesujący pomysł, a jednocześnie bardzo dobry przykład integracji międzyprzedmiotowej. Realizując doświadczenie, uczniowie odkrywają, że siła przyłożona do dźwigni dwustronnej jest odwrotnie proporcjonalna do długości jej ramienia. Bardzo ciekawe i atrakcyjne dla uczniów, choć być może niezbyt precyzyjne (o jaką huśtawkę chodzi?) jest pytanie problemowe: „Czy można huśtać się ze słoniem?”.

Źródła:
Podręcznik *Matematyka z plusem* dla klasy 1 gimnazjum, GWO, 2008.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Czy można huśtać się ze słoniem?

Przykładowa hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Możemy huśtać się ze słoniem, jednak przy odpowiednich odległościach.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Przedmioty do ważenia.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Odległości od punktu podparcia.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Przedmiotu o znanej masie do 50 g oraz linijki.

Instrukcja do doświadczenia:
Potrzebne materiały:

Linijka, przedmiot o znanej masie do 50 g i długopis/ołówek.

Wykonanie:

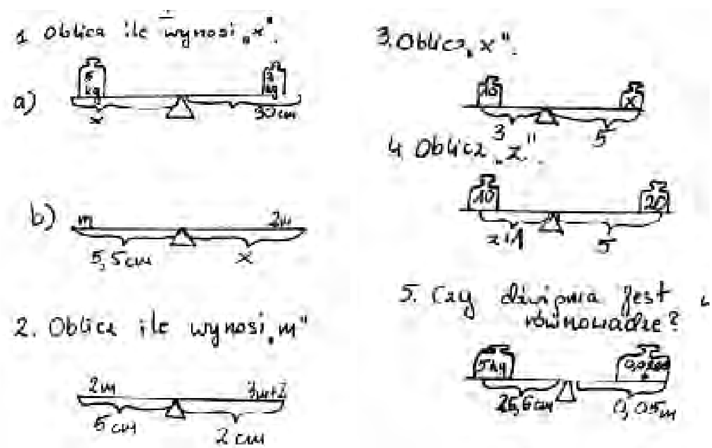
1. Na linijce z jednej strony połóż przedmiot o znanej masie, a po przeciwnej długopis. Linijkę umieść na brzegu stołu i delikatnie przesuwaj do momentu aż się przechyli. Odczytaj wtedy na linijce odległość od brzegu stołu do przedmiotu o znanej masie.
2. Oblicz masę długopisu, korzystając ze wzoru: m × r = M • R
   m – waga długopisu,
   M – waga przedmiotu (o znanej masie),
   r – odległość długopisu od brzegu stołu,
   R – odległość przedmiotu o znanej masie od brzegu stołu.
3. Podobnie oblicz wagę innego przedmiotu.
4. Przyjmij, że człowiek waży 50 kg, a słoń 5 ton i siedzi w odległości 5 m od punktu podparcia. Oblicz, jak daleko od punktu podparcia siedzi człowiek, który jest w równowadze ze słoniem.

BHP:
Ostrożnie posługuj się przedmiotami, ponieważ będą spadały!

Wnioski z doświadczenia:
Czy wyniki doświadczenia są zgodne z hipotezą?
Tak.

Uzasadnienie: Potrzebna jest odpowiednia odległość, bo między punktem podparcia a człowiekiem musi być 500 m.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Obliczenia uczniowskie:



Komentarz eksperta:
Prawidłowo wykonanie tego doświadczania na lekcji matematyki umożliwia sformułowanie wniosku opisującego związek między wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Uczniowie powinni zauważyć, że iloczyn wielkości odwrotnie proporcjonalnych jest stały, a więc jeżeli wartość jednej ze zmiennych rośnie *k*-razy, to wartość drugiej maleje tyle samo, czyli *k*-razy.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby powtórzyć doświadczenie:
Celem doświadczenia jest praktyczne zastosowanie wzoru na dźwignię dwustronną do ważenia przedmiotów. Eksperyment pozwala dostrzec uczniom zależność między masą przedmiotu a długością ramienia dźwigni, na którym umieszczono ważony przedmiot. Przeprowadzenie eksperymentu zgodnie z powyższą instrukcją nie gwarantuje jednak poprawnego wyznaczenia nieznanej masy przedmiotu. Po wykonaniu obliczeń warto zważyć przedmiot i porównać jego masę z otrzymanym wynikiem. W takim przypadku lepiej byłoby zbudować dźwignię o dłuższej belce. W tym celu można posłużyć się dłuższą linijką opartą na ołówku. Warto także wykorzystać proste przyrządy, które można znaleźć w każdej szkole: wagi laboratoryjne lub statywy, a do pomiarów wykorzystać odważniki. Przykłady różnych tego typu konstrukcji można znaleźć na stronie WWW pod niżej podanym adresem http://www.google.pl/search?q=d%C5%BAwignia+dwustronna&hl=pl&rlz=1W1SUNC_plPL364&prmd=imvns&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=EV1CT4T5G8qa-wakhOXnBQ&sqi=2&ved=0CEEQsAQ&biw=1024&bih=540 (data dostępu 20.02.2012). Wtedy łatwiej porównać obliczoną i rzeczywistą masę przedmiotu, a uzyskany wynik pozwoli nie tylko zweryfikować poprawność wzoru, ale także przekona uczniów o jego użyteczności. Należy pamiętać również o tym, że masa i ciężar to pojęcia, których nie można stosować zamiennie.

Propozycja pracy domowej:
Oblicz, w jakiej odległości od punktu podparcia musisz usiąść, aby huśtać się z mamą lub tatą, która/który siedzi w odległości 1 m od punktu podparcia.

VII. Równania

51. Temat lekcji: Czy suma pól księżyców Hipokratesa kwadratu równa jest polu tego kwadratu?

Podstawowe pojęcia: księżyce Hipokratesa, okrąg, koło, pole koła, kwadrat, przekątna kwadratu, okrąg wpisany w wielokąt, okrąg opisany na wielokącie.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: VI. Wyrażenia algebraiczne, s. 176.

55. Temat lekcji: Czy można huśtać się ze słoniem?

Podstawowe pojęcia: proporcja, prawo dźwigni dwustronnej.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: VI. Wyrażenia algebraiczne, s. 187.

VIII. Wykresy funkcji

16. Temat lekcji: Czy człowiek współczesny jest człowiekiem witruwiańskim?

Podstawowe pojęcia: człowiek witruwiański, wysokość, rozpiętość ramion, szacowanie, jednostka długości: centymetr.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 56.

IX. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa

8. Temat lekcji: Co to jest BMI i jakie jest prawidłowe BMI dla osoby w moim wieku?

Podstawowe pojęcia: BMI, niedowaga, nadwaga, otyłość.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 38.

16. Temat lekcji: Czy człowiek współczesny jest człowiekiem witruwiańskim?

Podstawowe pojęcia: człowiek witruwiański, wysokość, rozpiętość ramion, szacowanie, jednostka długości: centymetr.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 56.

27. Temat lekcji: Matematyczna kostka do gry

Podstawowe pojęcia: rachunek prawdopodobieństwa, statystyka opisowa, procent, diagram procentowy.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 85.

56. Temat lekcji: Jak wybrać najkorzystniejszą ofertę telefoniczną?

Na podstawie pracy Marzanny Boć-Ochyry oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursach internetowych w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: abonament telefoniczny, porównanie ofert różnych operatorów, opłata za sms, mms, minutę rozmowy, naliczanie sekundowe.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń:
   1) interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów;
   2) wyszukuje, selekcjonuje i porządkuje informacje z dostępnych źródeł.

Rekomendacja eksperta CEO:
Doświadczenie w nieschematyczny sposób pozwala zastosować wiedzę matematyczną do układów trudno mierzalnych – nieposiadających jednoznacznych parametrów decydujących o wyborze. Wyjątkowo ważnym etapem rozwiązania jest jego dyskusja. Te zajęcia z pytaniem problemowym są dość nietypowe z punktu widzenia matematyki gimnazjalnej i typowe – jeśli chodzi o potrzeby zastosowań matematyki w życiu codziennym. Jest to także pomysł autorski z niezliczoną liczbą możliwych modyfikacji i dużą liczbą dobrych rozwiązań – dla każdego ucznia może być to rozwiązanie indywidualnie dobre i weryfikacja hipotezy może mieć charakter zarówno indywidualny, jak i zespołowy.

Źródło:
Pomysł autorki wykorzystany wcześniej w projekcie „Szkoła Marzeń”.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Jak wybrać najkorzystniejszą ofertę telefoniczną?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Uczniowie przewidują, oferta której sieci jest najkorzystniejsza.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Uczniowie przeszukują zasoby internetowe w poszukiwaniu ofert firm telefonicznych. Interpretują dane, które wcześniej wyszukali i wyselekcjonowali pod kątem opłacalności, tzn. największej liczby poszczególnych usług telefonicznych w ramach zbliżonych poziomów abonamentu.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Operatora telefonicznego.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Ofertę opłat za telefon komórkowy.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Wartości abonamentu.

Instrukcja do doświadczenia:
1. Korzystając z Internetu, znajdź oferty przynajmniej 3 różnych operatorów telefonicznych dotyczące opłat za telefon w ramach tzw. abonamentu – dla takiego samego lub podobnego poziomu abonamentu – najbardziej odpowiadającego Twoim potrzebom i możliwościom finansowym.
2. Przedstaw informacje na temat tych ofert.
3. Porównaj oferty i wskaż najkorzystniejszą dla Ciebie. Uzasadnij, dlaczego Twoim zdaniem będzie ona dla Ciebie najkorzystniejsza.
4. Zapisz wyniki swojej pracy na karcie.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Uczniowie powinni dokonać wyboru poziomu abonamentu i wyjaśnić, dlaczego taki wybrali.

Powinni przedstawić pełną ofertę, np. poprzez jej przytoczenie lub link do oferty na stronie operatora.

Powinni zwrócić w ofercie uwagę na sposób korzystania z telefonu i podkreślić, z jakich usług korzystają najczęściej i w jakim wymiarze (sms-y, rozmowy telefoniczne, mms-y, dostęp do Internetu…).

Powinna być przedstawiona dokładna dyskusja różnych przypadków i dokładne uzasadnienie wyboru.

Warto przygotować arkusz kalkulacyjny z zestawieniem liczby usług, z których korzystają i kosztów w ramach poszczególnych sieci.

Przykładowy arkusz kalkulacyjny

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Sieci</td><td colspan="3">Koszty w:</td></tr>
<tr><td>Plus</td><td>Orange</td><td>Play</td></tr>
<tr><td colspan="2">Abonament</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Rodzaj usługi</td><td>Ilość z jakiej korzystam*</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Sms</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Mms</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Rozmowy</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Internet</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Inne usługi</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Łączny koszt miesięczny</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

* *Jeśli wystarcza Ci abonament, wpisz 0*

Modyfikacja eksperymentu:
Doświadczenie przedstawiono już w wersji zmodyfikowanej. Można pokusić się o dalszą analizę ofert pod kątem ich opłacalności i w kontekście indywidualnych potrzeb użytkownika przy innych poziomach abonamentu – szczególnie, jeśli jedna z usług bywa wyjątkowo używana lub gdy uczeń nie wykorzystuje jej. Może się wówczas okazać, że inny abonament (wyższy lub niższy) okaże się korzystniejszy w danej lub w innej sieci. Warto dokonać dyskusji w gronie osób, które wybrały podobny poziom abonamentu lub zbliżone zakresy wielkości usług, z których korzystają. Jeśli od początku decydujemy się na pracę zespołową, należy takie parametry brzegowe wspólnie, precyzyjnie określić.

Propozycja pracy domowej – możesz wiedzieć więcej:
Co jest korzystniejsze: telefon na abonament czy też na kartę?

57. Temat lekcji: Jak przechytrzyć kozę?

Na podstawie pracy Elżbiety Żak oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: strategia gry, zdarzenie losowe, prawdopodobieństwo zdarzenia, krupier.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń:
   5) analizuje proste doświadczenia losowe (np. rzut kostką, rzut monetą, wyciąganie losu) i określa prawdopodobieństwa najprostszych zdarzeń w tych doświadczeniach (prawdopodobieństwo wypadnięcia orła w rzucie monetą, dwójki lub szóstki w rzucie kostką itp.)

Rekomendacja eksperta CEO:
Nauczycielka zaproponowała uczniom do rozwiązania bardzo ciekawy i wciągający problem dotyczący wyboru strategii (korzystniejszej dla wygranej) w grze wzorowanej na teleturnieju „Idź na całość”. Konfrontacja uczniowskich hipotez dotyczących intrygującej kwestii zawartej w pytaniu kluczowym: „Jak przechytrzyć kozę?” i będącej próbą odpowiedzi na pytanie badawcze – która z przedstawionych strategii gry jest korzystniejsza może odbywać się dwuetapowo. Pierwszej weryfikacji warto dokonać po wykonaniu zaproponowanego doświadczenia empirycznego, drugiej – po wykonaniu „doświadczenia myślowego” – rozważenia teoretycznej szansy wygranej z zastosowaniem każdej ze strategii.

Źródło:
1. Marta Mańczuk i Witold Sadowski, *Salon gier losowych*, Delta, listopad 2004.
2. http://marcinotorowski.com/publicystyka/inne/zagadka-z-koza/

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Jak przechytrzyć kozę? Czyli co zrobić, aby wybrać drzwi, za którymi znajduje się samochód?

Możliwe hipotezy zaproponowane przez uczniów:
Należy wybrać strategię I – zawsze zmienić swój wybór.

Należy wybrać strategię II – nigdy nie zmieniać swego wyboru.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Oparty na opisie ze strony: http://marcinotorowski.com/publicystyka/inne/zagadka-z-koza/.

Wyobraź sobie, że bierzesz udział w teleturnieju. Jego zasady są proste – dostępne są trzy bramki ponumerowane od 1 do 3, z czego w jednej jest samochód, a w pozostałych dwóch znajdują się kozy. Bramki wyglądają identycznie, nie można więc poznać po wyglądzie, co kryją, a umiejscowienie samochodu jest losowe. Prowadzący teleturniej wie, w której bramce jest nagroda.

Wybierasz dowolne drzwi, np. oznaczone numerem 1, nabywając tym samym prawo otrzymania znajdującej się za nimi nagrody. Zanim wybrane przez Ciebie drzwi się otworzą, prowadzący, wiedząc, co jest na zapleczu, otwiera inne drzwi, np. numer 3, pokazując, że stoi za nimi koza, po czym proponuje Ci możliwość zmiany wyboru drzwi z numeru 1 na numer 2.

Jak powinien postąpić gracz, aby mieć większe szanse otrzymania kluczyków do auta?

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Zmieniamy strategię gry.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Obserwujemy liczbę wygranych.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Nie zmieniamy reguł gry.

Instrukcja do doświadczenia:
Będą potrzebne trzy jednakowe kubki, 2 karty z kozą i 1 z samochodem, trochę monet, guzików, zapałek lub innych przedmiotów, które posłużą do zliczania wygranych.

Do gry potrzeba minimalnie trzech osób, jedna do roli krupiera, druga do roli gracza, trzecia do zliczania prób i wypłacania nagród.

Gracz cały czas stosuje obraną strategię:

STRATEGIA I: zawsze zmieniaj wybór;

STRATEGIA II: nigdy nie zmieniaj wyboru.

Krupier postępuje tak, jak prowadzący w teleturnieju, ukrywając po jednej karcie pod każdym z kubków i gra się rozpoczyna. Za każdą wygraną (czyli odkrycie kubka z samochodem) gracz otrzymuje monetę (zapałkę lub inny licznik).

Teraz potrzebna jest cierpliwość: żeby otrzymać sensowne wyniki, należy grać dość długo, jednak już po około pięćdziesięciu rundach zaobserwujcie różnicę w liczbie zgromadzonych monet przez graczy grającymi różnymi metodami.

Spróbujcie po wykonaniu minimum 50 eksperymentów określić, jaka jest (waszym zdaniem) przybliżona szansa na zwycięstwo w grze, gdy gramy strategią I i gdy gramy strategią II.

Skonfrontujcie swoje aktualne przewidywanie z postawioną hipotezą.

Wypiszcie wszystkie możliwe wyniki pojedynczego eksperymentu i na tej podstawie określcie teoretyczne prawdopodobieństwo wygranej wg strategii I i wg strategii II.

Czy „teoria" zgadza się z wynikami przeprowadzonego doświadczenia? Czy zgadza się z postawioną przez Was hipotezą?

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Dokumentacja doświadczenia **empirycznego**:

Nr doświadczenia	Jaki był układ dwóch kóz i samochodu			Na którą bramkę postawiono	Czy wygrano według strategii	
	B1	B2	B3		S1	S2
Przykład	K	K	S	B2	tak	nie
1						
2						
3						

Dokumentacja **teoretycznej** możliwości wygranej wg poszczególnych strategii:

Wszystkie możliwe wyniki pojedynczego eksperymentu, czyli co na to matematyka?

K zasłonięta bramka, **K** wybór gracza, **K** odsłonięta bramka

STRATEGIA 1 – ZAWSZE ZMIENIAJ WYBÓR

Gracz wybiera bramkę 1. Rozważmy wszystkie możliwe układy.

			Przypadek 1						**Przypadek 2**				**Przypadek 3**		
Układ początkowy			**S**	**K**	**K**				**K**	**S**	**K**		**K**	**K**	**S**
Początkowy wybór gracza			**S**	**K**	**K**				**K**	**S**	**K**		**K**	**K**	**S**
Ujawnienie bramki z kozą	**S**	**K**	**K**	lub	**S**	**K**	**K**		**K**	**S**	**K**		**K**	**K**	**S**
Zmiana wyboru	**S**	**K**	**K**		**S**	**K**	**K**		**K**	**S**	**K**		**K**	**K**	**S**
			PRZEGRANA						WYGRANA				WYGRANA		
	(bez względu na to, którą bramkę z kozą odsłoni krupier)														

Analogicznie przy początkowym wyborze bramki nr 2 lub bramki nr 3.

SZANSA NA WYGRANĄ: $\frac{2}{3}$

STRATEGIA 2 – NIGDY NIE ZMIENIAJ WYBORU

Gracz wybiera bramkę 1. Rozważmy wszystkie możliwe układy.

			Przypadek 1						**Przypadek 2**				**Przypadek 3**		
Układ początkowy			**S**	**K**	**K**				**K**	**S**	**K**		**K**	**K**	**S**
Początkowy wybór gracza			**S**	**K**	**K**				**K**	**S**	**K**		**K**	**K**	**S**
Ujawnienie bramki z kozą	**S**	**K**	**K**	lub	**S**	**K**	**K**		**K**	**S**	**K**		**K**	**K**	**S**
Bez zmiany wyboru	**S**	**K**	**K**		**S**	**K**	**K**		**K**	**S**	**K**		**K**	**K**	**S**
			WYGRANA						PRZEGRANA				PRZEGRANA		
	(bez względu na to, którą bramkę z kozą odsłoni krupier)														

Analogicznie przy początkowym wyborze bramki nr 2 lub bramki nr 3.

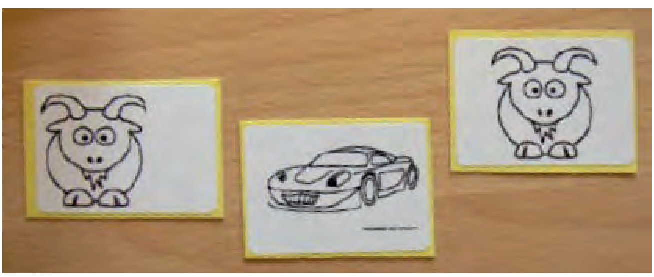
SZANSA NA WYGRANĄ: $\frac{1}{3}$

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Jeśli zależy nam na szybkim pojawieniu się dużej liczby wyników, można zbudować narzędzie komputerowe (np. za pomocą arkusza kalkulacyjnego) generujące jednocześnie bardzo wiele wyników pojedynczych doświadczeń i zliczające liczbę wygranych dla poszczególnych strategii. Wówczas mamy szansę na zbliżenie się z wynikiem praktycznego doświadczenia do wyniku teoretycznego. Można to zrobić jako rozszerzenie i uzupełnienie zajęć, szczególnie że powinno się pojawić zapotrzebowanie na wyjaśnienie dysonansu poznawczego.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Wynik doświadczenia przeprowadzonego przez uczniów w tym przypadku był nie do końca zgodny z teoretycznym – co okazało się szczególnie sprzyjające dla prowadzanych zajęć z pytaniem problemowym. Istnieje duża szansa na zaistnienie efektu Eureki podczas takich zajęć. Uczniowie mogą się namacalnie przekonać, że wyniki doświadczeń empirycznych mogą nie korespondować z teorią matematyczną i warto przeprowadzić dyskusję – dlaczego tak jest i kiedy mamy szansę otrzymać zbliżone wyniki doświadczenia empirycznego i myślowego. Proponuję także przygotować wskazany model w arkuszu, który umożliwi zaobserwowanie zasady zbliżania się wyników do teorii przy rosnącej liczbie pojedynczych eksperymentów.

Wybrane załączniki:
Karty z kozą i samochodem

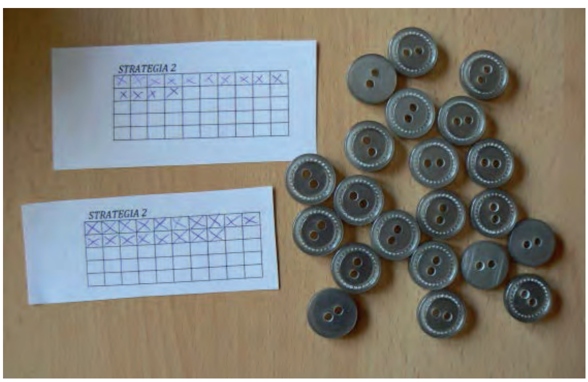




Wybór kolejnych drzwi – kubków

Wyniki kolejnych wyborów z zastosowaniem strategii I

Wyniki kolejnych wyborów z zastosowaniem strategii II



X. Figury płaskie

5. Temat lekcji: Eksperyment z podręcznikami

Podstawowe pojęcia: pole prostokąta, jednostki długości i pola.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 31.

9. Temat lekcji: Ile klocków Lego potrzeba na zbudowanie domku w skali 100:1 w stosunku do przygotowanego modelu?

Podstawowe pojęcia: skala, pola figur płaskich, jednostki długości i pola, objętość graniastosłupa.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 40.

12. Temat lekcji: Ile kilogramów kaszy potrzeba, aby zakryć nią całą podłogę w klasie?

Podstawowe pojęcia: powierzchnia prostokąta, jednostki miary, jednostki wagi, zamiana jednostek.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 46.

21. Temat lekcji: Czy 20 000 zł wystarczy na urządzenie kuchni o wymiarach 4×5 m?

Podstawowe pojęcia: działania na liczbach, jednostki miary, zamiana jednostek, skala, plan.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 71.

25. Temat lekcji: Ile kosztuje założenie ogrodu?

Podstawowe pojęcia: pola i obwody wielokątów, skala, plan, jednostki powierzchni.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 80.

28. Temat lekcji: Matematyka a podróż Arkadego Fiedlera

Podstawowe pojęcia: skala, zamiana jednostek długości.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 89.

36. Temat lekcji: Czy wszyscy uczniowie naszej szkoły zmieściliby się w pracowni, w której masz lekcje matematyki?

Podstawowe pojęcia: pole, jednostki długości i pola i ich zamiana, wielkości wprost proporcjonalne, szacowanie.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 123.

37. Temat lekcji: Jaki jest koszt wysiania trawy na działce o rzeczywistych wymiarach?

Podstawowe pojęcia: skala, pole powierzchni, jednostki miary, jednostki powierzchni, zamiana jednostek.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 125.

51. Temat lekcji: Czy suma pól księżyców Hipokratesa kwadratu równa jest polu tego kwadratu?

Podstawowe pojęcia: księżyce Hipokratesa, okrąg, koło, pole koła, kwadrat, przekątna kwadratu, okrąg wpisany w wielokąt, okrąg opisany na wielokącie.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: VI. Wyrażenia algebraiczne, s. 176.

58. Temat lekcji: Ile razy zwiększy się pole wielokąta, jeżeli jego wymiary zwiększymy dwukrotnie?

Na podstawie pracy Agnieszki Zakrzewskiej oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: kwadrat, prostokąt, trójkąt, romb, wielokąty podobne, pole wielokąta.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
10. Figury płaskie. Uczeń:
   9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów;

11) oblicza wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali;
12) oblicza stosunek pól wielokątów podobnych.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Bardzo dobre ćwiczenie na obliczanie pól. Unikalna możliwość pracy ze skalą i podobieństwem jeszcze przed wprowadzeniem tych pojęć. Gwarantowane zaskoczenie uczniów wynikami obliczeń. Jednocześnie zadanie jest możliwe do wykonania dla przeciętnego ucznia.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Ile razy zwiększy się pole wielokąta, jeżeli jego wymiary zwiększymy dwukrotnie?

Przykładowa hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Pole powiększy się dwukrotnie.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Podczas wykonywania doświadczenia uczniowie mają odpowiedzieć na pytanie problemowe: „Ile razy zwiększy się pole wielokąta, jeżeli jego wymiary zwiększymy dwukrotnie?”.

Uczniowie badają, jak zmieniają się pola czterech różnych wielokątów – obliczają pole figury „wyjściowej” i figury, która ma dwukrotnie zwiększone wymiary, a następnie liczą ilorazy otrzymanych pól.

Temat podobieństwa figur geometrycznych, pojęcie skali podobieństwa pojawia się wg programu dopiero w trzeciej klasie gimnazjum. Można jednak już w pierwszej klasie zasygnalizować ten problem, ale bez wprowadzania całej teorii związanej z podobieństwem figur. Uczniowie świetnie sobie radzą z doświadczeniem już na tym poziomie, wyciągają właściwy wniosek, a nawet mogą pokusić się o uogólnienie „odkrytej” własności.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Wymiary danego wielokąta (długości boków, wysokości, przekątne).

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Pola wielokątów, stosunek pól wielokątów podobnych.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Skali podobieństwa figur.

Instrukcja do doświadczenia:
Zajęcia prowadzimy w grupach.

W każdej grupie wybierzcie sekretarza, który będzie notował wyniki na karcie pracy.

1. Dla każdego wielokąta umieszczonego w tabeli (kolumna I) ustalcie dowolne jego wymiary (długości boków, wysokość lub długość przekątnych – kolumna II) i policzcie jego pole. Wyniki wpiszcie w III kolumnie poniższej tabeli.
2. W kolumnie IV wpiszcie wymiary nowego wielokąta po dwukrotnym zwiększeniu wymiarów figury znajdujących się w kolumnie II. Obliczcie pole tego wielokąta i wpiszcie w V kolumnie.
3. Obliczcie ilorazy pól figur: „powiększonej" i wyjściowej. Wyniki zanotujcie w VI kolumnie.
4. Porównajcie wyniki otrzymane w VI kolumnie dla wszystkich wielokątów i spróbujcie wyciągnąć wnioski.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:

	Wymiary I wielokąta	**Pole I wielokąta**	**Wymiary większego wielokąta**	**Pole większego wielokąta**	**Iloraz pól obu figur**
Kwadrat					
Prostokąt					
Trójkąt					
Romb					

Propozycja modyfikacji eksperymentu:

1. Ile razy zwiększy się pole wielokąta, jeżeli jego wymiary zwiększymy trzykrotnie?
2. Ile razy zwiększy się pole wielokąta, jeżeli jego wymiary zwiększymy *k*-krotnie?

59. Temat lekcji: Jakie są zależności między podstawowymi formatami arkuszy?

Na podstawie pracy Jolanty Jąder oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna.

Podstawowe pojęcia: Pole prostokąta, jednostki pola.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
10. Figury płaskie. Uczeń:
   9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów;
   11) oblicza wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali.
   → Obliczanie pola czworokąta będącego prostokątem.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Dzięki temu eksperymentowi (lekcji z pytaniem problemowym) uczniowie poznają używane powszechnie wymiary formatów i sprawdzają, jakie są między nimi zależności.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Jakie są zależności miedzy podstawowymi formatami arkuszy?

Przykładowa hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Każdy format jest połową formatu większego od siebie.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Wielkość kartki przedstawiającej format.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Wielkość formatu (pola prostokąta).

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Zajmiemy się tylko formatami typu A.

Instrukcja do doświadczenia:
Wybrani wcześniej uczniowie przedstawiają podstawowe formaty arkuszy, jak powstają, jakie mają wymiary, jakie przedmioty użytku codziennego mają wymiary podstawowych arkuszy A0–A8. Po prezentacji uczniowie wspólnie obliczają pola arkuszy w cm^2 i szukają zależności między tymi polami.

Jako ćwiczenie można wykonać obliczenia:
- Jaką częścią formatu A6 jest A7?
- Ile arkuszy formatu A8 można uzyskać z formatu A0?
- Ile arkuszy formatu A7 można uzyskać z formatu A5?

60. Temat lekcji: Krzyżówka z kątami i trójkątami

Na podstawie pracy uczniów pod opieką Bożeny Gąski. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: trójkąt, rodzaje trójkątów, kąt, rodzaje kątów.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
III etap edukacyjny
10. Figury płaskie. Uczeń:
    1) korzysta ze związków między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe.

II etap edukacyjny: klasy IV–VI
8. Kąty. Uczeń:
    4) rozpoznaje kąt prosty, ostry i rozwarty;
    6) rozpoznaje kąty wierzchołkowe i kąty przyległe oraz korzysta z ich własności.
9. Wielokąty, koła, okręgi. Uczeń:
    1) rozpoznaje i nazywa trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne, równoboczne i równoramienne.

Rekomendacja ekspertki CEO:
Gotowa krzyżówka, utrwalająca pojęcia związane z trójkątami i kątami.

OPIS GRY

Planowane korzyści z gry:
Powtórzenie wiadomości o kątach i trójkątach.

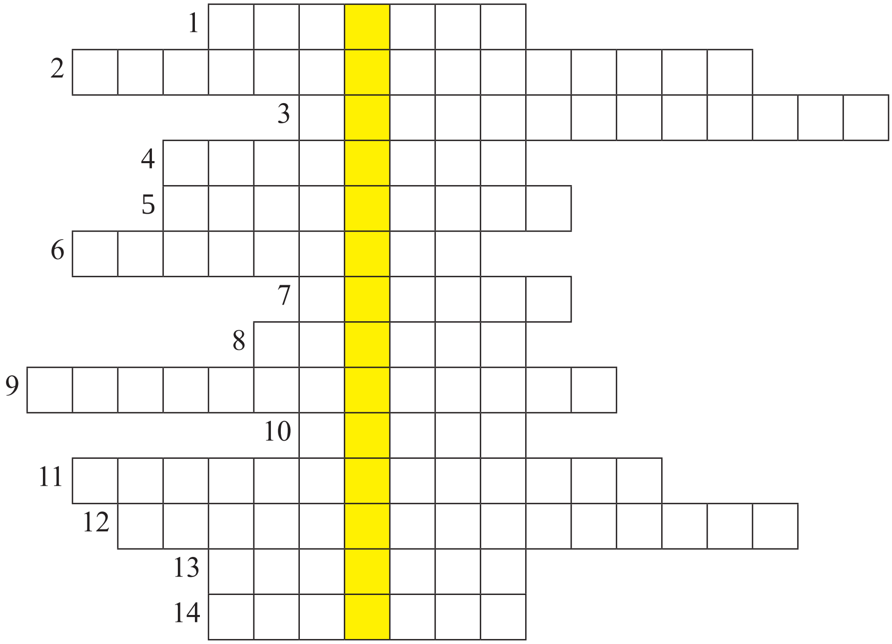
Instrukcja gry:
Przeczytaj dokładnie pytanie, odpowiedź wpisz w puste kratki w krzyżówce.

Z wyodrębnionych pól odczytaj hasło i zapisz je poniżej.

Krzyżówka z kątami i trójkątami
Pytania:

1. Kąt, którego miara jest większa od 0° i mniejsza od 180°.
2. Kąty, wyznaczone przez dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą.
3. Kąty, które mają wspólny wierzchołek.
4. Kąt, który ma miarę 180°.
5. Mierzymy nim kąty.
6. Kąty o wspólnym ramieniu, razem mają 180°.
7. Kąt, który ma miarę 0°.
8. Kąt, który ma miarę 90°.
9. Trójkąt, który ma ramiona równej długości.
10. Kąt, który ma miarę 360°.
11. Trójkąt, w którym jeden z kątów wewnętrznych jest rozwarty.
12. Jeden z boków w trójkącie prostokątnym.
13. Trójkąt równoramienny ma równe…
14. Kąt, który ma miarę większą niż 180° i mniejszą niż 360°.

Krzyżówka



61. Temat lekcji: Ile istnieje parkietaży platońskich?

Na podstawie pracy Alicji Nimirskiej oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: wielokąt, wielokąt foremny, parkietaż platoński.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

10. Figury płaskie. Uczeń:

 22) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności.

Rekomendacja eksperta CEO:
Doświadczenie gwarantuje efekt Eureki. Wynik doświadczenia jest przesłanką do poszukiwania odpowiedzi na pytanie problemowe i poprawnego uzasadnienia, dlaczego istnieją tylko trzy parkietaże platońskie. Lekcja zachęca uczniów do praktycznego wykorzystania właściwości figur geometrycznych poprzez wzbudzenie w nich chęci budowania innych parkietów.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Ile istnieje parkietaży platońskich?

Źródło:
Piotr Pawlikowski, *Matematyka pod stopami*: http://www.matematyka.wroc.pl/;
Marzenna Grochowalska, *Parkietaże i desenie*: www.czasopisma.gwo.pl.

Możliwe hipotezy zaproponowane przez uczniów:
Parkietaży platońskich jest bardzo dużo i nie da się podać ich konkretnej liczby, ponieważ wielokąty foremne można wybrać na wiele sposobów.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Z przygotowanych, przystających wielokątów foremnych należy zbudować parkietaż, przyklejając je do kartki papieru (płaszczyzna) tak, by nie pozostawić wolnych miejsc. Analizując przypadki, gdy doświadczenie udaje się zrealizować zgodnie z poleceniem i gdy to nie jest możliwe, należy ustalić warunki, przy których uda się zbudować parkiet platoński i określić, ile różnych parkietów platońskich można ułożyć.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Rodzaj wielokąta.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Zapełnienie powierzchni wybranym wielokątem.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Warunków uzyskania parkietażu platońskiego.

Instrukcja do doświadczenia:
Materiały:
Czysta kartka papieru, wielokąty foremne i nieforemne, klej.

Najlepiej wykonać to doświadczenie w grupach.

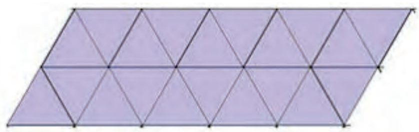
Wykonanie:

1. Zapoznajcie się z określeniem parkietażu platońskiego.
2. Zbudujcie parkietaże platońskie, posługując się przygotowanymi wielokątami.
3. Następnie pokażcie wyniki swojej pracy innym grupom.
4. Jakie własności wielokątów decydują, że można ułożyć z nich parkietaż platoński?

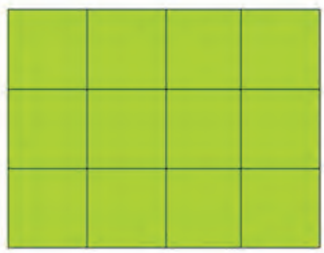
BHP:

Stosujcie zasady BHP obowiązujące w pracowni matematycznej.

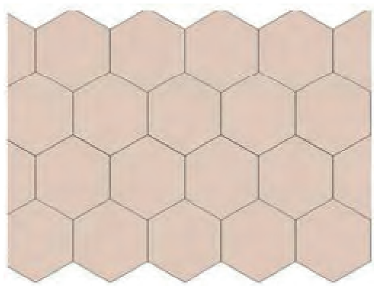
Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:



Parkietaż platoński zbudowany z trójkątów równobocznych.



Parkietaż platoński zbudowany z kwadratów.



Parkietaż platoński zbudowany z sześciokątów foremnych.

Trójkąt równoboczny
360° : 60° = 6 – tyle spotka się trójkątów równobocznych we wspólnym wierzchołku.

Kwadrat
360° : 90° = 4 – tyle spotka się kwadratów we wspólnym wierzchołku.

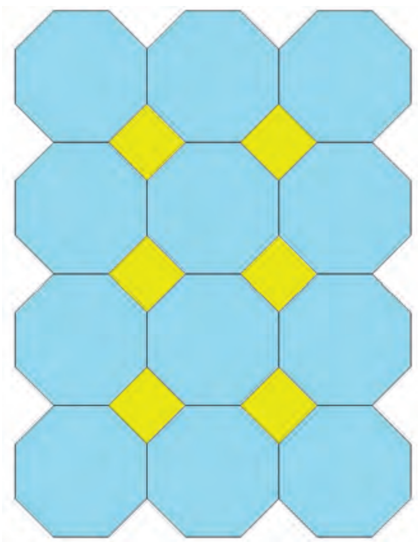
Pięciokąt foremny
360° : 108° = 3,3(3) – niemożliwe do wykonania.

Sześciokąt foremny
360° : 120° = 3 – tyle spotka się sześciokątów foremnych we wspólnym wierzchołku.

Siedmiokąt foremny
360° : $128\frac{4}{7}$° – około 2,8 – niemożliwe do wykonania.

Pozostałe wielokąty foremne – niemożliwe do wykonania, gdyż miara kąta wewnętrznego będzie coraz większa, przez co liczba otrzymanych figur będzie mniejsza od 3, a tak być nie może.

Jakie własności wielokątów decydują, że można ułożyć z nich parkietaż platoński?
1. Muszą to być wielokąty foremne jednego rodzaju i przystające do siebie.
2. Kąty wewnętrzne wyznaczone przez wspólny wierzchołek w sumie dają 360°.



Parkietaż, który nie spełnia warunków – gdy są dwa rodzaje wielokątów foremnych.

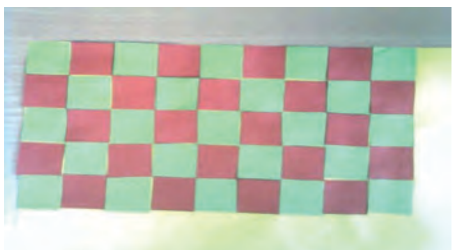
Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Na ile sposobów można wybrać figury do parkietażu archimedesowego?

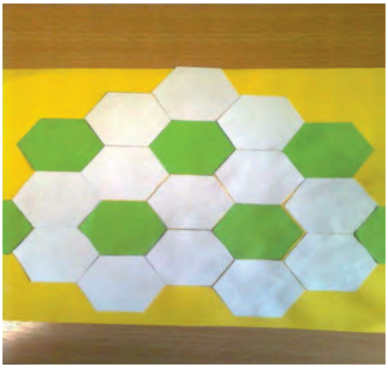
Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Doświadczenie można wykonywać za pomocą programów komputerowych do nauczania geometrii, np. Cabri, GeoGebra, C.a.R. Uczniowie chętnie budują także parkiety z wielokątów nieforemnych i z różnych ich typów.

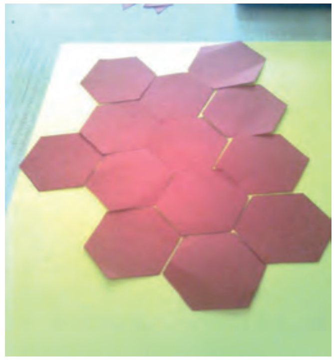
Załączniki wybrane przez eksperta:
Zdjęcia przedstawiające wykonane przez uczniów parkietaże platońskie.

– *przygotowane materiały:*

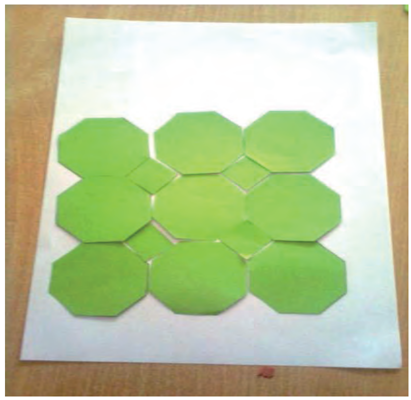
– *parkietaże platońskie z trójkątów równobocznych, kwadratów i sześciokątów foremnych:*

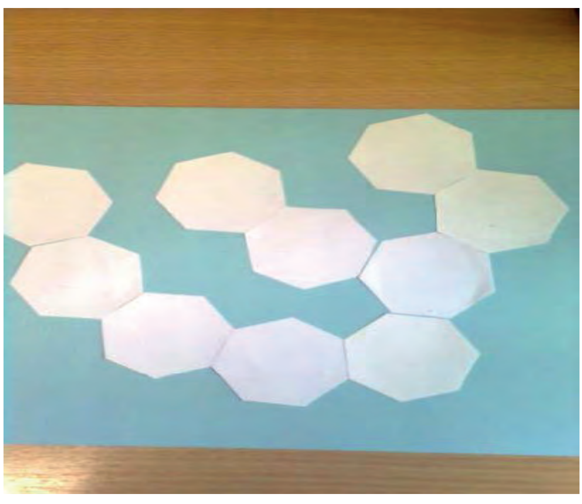






– przykłady potwierdzające przeprowadzenie prób z innymi wielokątami:





62. Temat lekcji: Matmopoly – gra planszowa

Na podstawie pracy uczniów pod opieką Elżbiety Żak. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: trójkąt (prostokątny, rozwartokątny, ostrokątny, równoboczny, równoramienny), kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok, trapez, koło, okrąg, pole figury, obwód figury, kąty (wierzchołkowe, przyległe, odpowiadające, naprzemianległe), kąt (ostry, prosty, pełny, półpełny, rozwarty).

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

10. Figury płaskie. Uczeń:

1) korzysta ze związków między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe;
8) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach;
9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów;
10) zamienia jednostki pola;
14) stosuje cechy przystawania trójkątów.

Rekomendacja eksperta CEO:

Znamy i chętnie gramy w „Monopoly". „Matmopoly", wykorzystując zasady tej gry, pozwala ćwiczyć umiejętności matematyczne. Zarówno plansza, jak i pozostałe elementy gry: banknoty, akty własności oraz karty szansy zostały opracowane samodzielnie przez uczniów. Karty szansy zawierały różnorodne zadania dotyczące materiału z geometrii omawianego na lekcjach matematyki. Instrukcja gry pochodzi z oryginalnej wersji.

Źródło:

Gra wzorowana na: www.monopoly.wpaski.com.

OPIS GRY

Planowane korzyści z gry:
Powtórzenie wiadomości dotyczących figur i kątów na płaszczyźnie oraz ćwiczenia w obliczaniu pól i obwodów wielokątów.

Instrukcja gry:
Gra „Matmopoly" jest modyfikacją gry „Monopoly". Reguły naszej gry są takie same, tylko korzystamy z innej planszy. Zamiast zwykłych banknotów w złotówkach mamy banknoty z naszą walutą – miary kątów. Używamy też własnych kart z zadaniami.

Oryginalna instrukcja na: www.monopoly.wpaski.com.

Opis strategii, jaką obrali uczniowie:
Uczniowie nie wskazują strategii gry. Zwracają uwagę na konieczność dobrego zapoznania się z zasadami gry.

Propozycja modyfikacji gry:
Można wymyślić jeszcze inną walutę i inne zadania. Grę można przygotować dla innych działów matematyki.

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Oprócz kształtowania wskazanych pojęć i umiejętności matematycznych gra pozwala na ćwiczenie zachowań strategicznych, ekonomicznych, podejmowania decyzji, a nawet ryzyka. Jest modelem dla doświadczania zachowań inwestorskich. Powinna stanowić cenną naukę życiowej prawdy związanej ze skutkami ryzyka poruszania się na trudnym obszarze współzawodnictwa. Koniecznie powinna zakończyć się dyskusją i wyciągnięciem praktycznych wniosków oraz wskazań dotyczących skutków przenoszenia zdobytych w grze doświadczeń do realnego świata. Wymiar etyczny jest w niej równie ważny jak praktyczny i emocjonalny. To jedna z wielu gier, które nie tylko kształtują umiejętności, ale skutkują koniecznością rozumienia, że życiowy analogon nie będzie jedynie grą. Uczniowie przygotowali gotową do zastosowania planszę i banknoty w wersji elektronicznej.

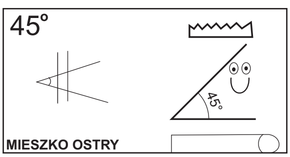
Zdjęcie elementów przed opracowaniem elektronicznym

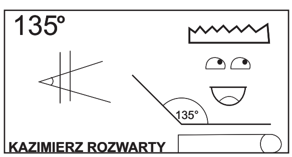
Wybrane załączniki:

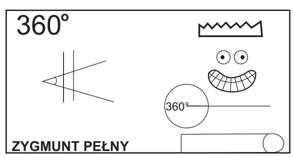
Akty własności

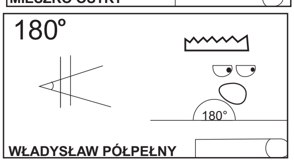
AKT WŁASNOŚCI **KWADRAT** CENA: 180° OPŁATA ZA POSTÓJ: 45°	AKT WŁASNOŚCI **ROMB** CENA: 135° OPŁATA ZA POSTÓJ: 25°	AKT WŁASNOŚCI **KOŁO** CENA: 180° OPŁATA ZA POSTÓJ: 90°	AKT WŁASNOŚCI **TRÓJKĄT ROZWARTOKĄTNY** CENA: 135° OPŁATA ZA POSTÓJ: $2\ 0^{\circ}$
AKT WŁASNOŚCI **TRÓJKĄT RÓWNORAMIENNY** CENA: 90° OPŁATA ZA POSTÓJ: 15°	AKT WŁASNOŚCI **TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY** CENA: 90° OPŁATA ZA POSTÓJ: 15°	AKT WŁASNOŚCI **TRÓJKĄT OSTROKĄTNY** CENA: 90° OPŁATA ZA POSTÓJ: 15°	AKT WŁASNOŚCI **OKRĄG** CENA: 180° OPŁATA ZA POSTÓJ: 90°
AKT WŁASNOŚCI **RÓWNOLEGŁOBOK** CENA: 135° OPŁATA ZA POSTÓJ: 30°	AKT WŁASNOŚCI **ELIPSA** CENA: 360° OPŁATA ZA POSTÓJ: 135°	AKT WŁASNOŚCI **PUNKT** CENA: 90° OPŁATA ZA POSTÓJ: 10°	AKT WŁASNOŚCI **PROSTA** CENA: 45° OPŁATA ZA POSTÓJ: 5°
AKT WŁASNOŚCI **ODCINEK** CENA: 45° OPŁATA ZA POSTÓJ: 5°			

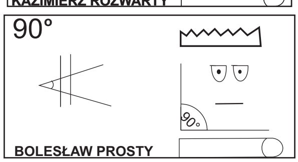
Waluta

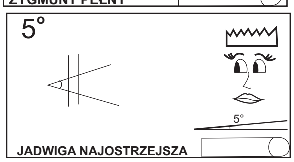




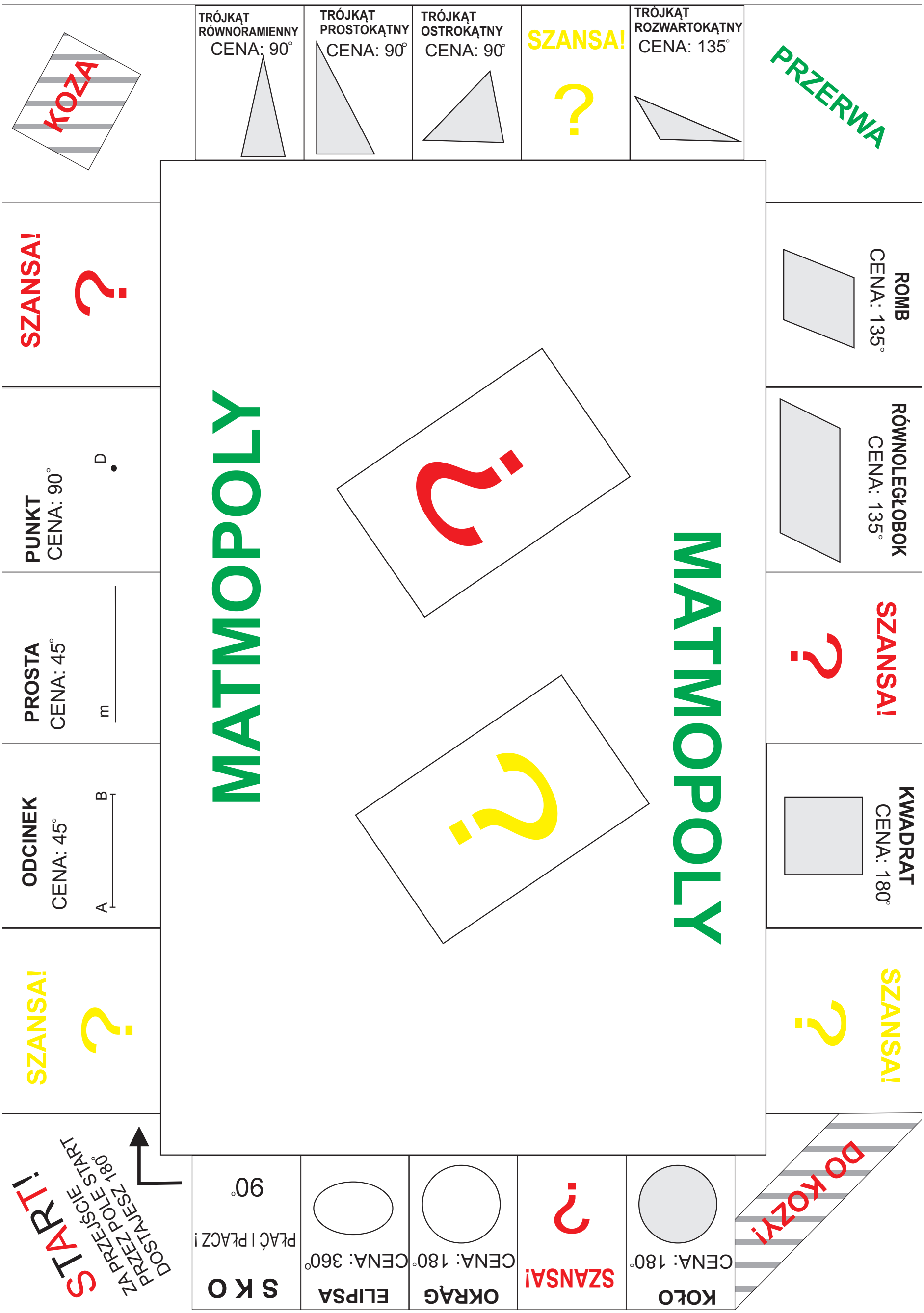








Plansza


MATMOPOLY
MATMOPOLY
KOZA
TRÓJKĄT RÓWNORAMIENNY CENA: 90°
TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY CENA: 90°
TRÓJKĄT OSTROKĄTNY CENA: 90°
SZANSA!
TRÓJKĄT ROZWARTOKĄTNY CENA: 135°
PRZERWA
ROMB CENA: 135°
RÓWNOLEGŁOBOK CENA: 135°
SZANSA!
KWADRAT CENA: 180°
SZANSA!
DO KOZY!
KOŁO CENA: 180°
SZANSA!
OKRĄG CENA: 180°
ELIPSA CENA: 360°
S K O PŁAĆ I PŁACZ ! 90°
START! ZA PRZEJŚCIE START PRZEZ POLE START DOSTAJESZ 180°
SZANSA!
ODCINEK CENA: 45°
A
B
PROSTA CENA: 45°
m
PUNKT CENA: 90°
D
SZANSA!

Instrukcja do gry:
MATMOPOLY – dydaktyczna gra planszowa
(na podstawie instrukcji gry Monopoly, źródło: www.monopoly.wpaski.com).

PODSTAWY – Gracze poruszają się po planszy zgodnie z ruchem wskazówek zegara i wykupują dostępne obiekty geometryczne. Jeśli ktoś wejdzie na pole należące do innego gracza, musi zapłacić mu czynsz. Czynsz jest uzależniony od rodzaju obiektu. Gracz, który doprowadzi do bankructwa wszystkich swoich konkurentów, wygrywa.

PORUSZANIE SIĘ – Na początku gracze ustalają albo losują, jaka będzie kolejność ruchu. Każdy gracz na początku swojej rundy rzuca dwiema kośćmi i porusza swój pionek o liczbę pól, którą wyrzucił. Jeśli wyrzuci dublet, zyskuje dodatkowy ruch. Dublet to sytuacja, kiedy wynik na obu kościach jest taki sam, na przykład dwie dwójki.

KUPOWANIE OBIEKTÓW – Kiedy gracz stanie na niewykupionym przez nikogo polu, może je zakupić albo wystawić na aukcji. Jeśli zdecyduje się na kupno, wpłaca do banku należną kwotę i bierze akt własności jako dowód zakupu. Jeśli wystawi obiekt na aukcji, gracze licytują się i obiekt kupuje ten, kto zdecyduje się zapłacić najwyższą cenę.

CZYNSZ – Kiedy gracz stanie na polu należącym do innego gracza, musi zapłacić mu czynsz. Jeśli nie ma z czego opłacić czynszu, zostaje bankrutem, oddaje wierzycielowi wszystkie swoje obiekty i odpada z gry.

KOZA – Do kozy można trafić na dwa sposoby:
- kiedy gracz stanie na polu „Koza" albo „Do kozy",
- poprzez wylosowanie karty „Szansy" nakazującej iść do kozy.

Z kozy można wyjść:
- poprzez pokazanie karty wyjścia z kozy albo,
- poprzez wyrzucenie dubletu na początku rundy (gracz, któremu przez trzy kolejne rundy nie uda się wyrzucić dubletu, płaci kaucję i wychodzi. Jeśli nie ma z czego zapłacić kaucji, staje się bankrutem, a jego nieruchomości przejmuje bank).

SZANSA – Jeśli gracz stanie na polu z symbolem „Szansy", losuje kartę i czyta jej zawartość, a potem wykonuje czynności opisane na karcie.

SZKOLNA KASA OSZCZĘDNOŚCI – Jeśli gracz stanie na polu SKO, płaci 900. Gracz, który nie ma z czego zapłacić podatków, zostaje bankrutem, a jego nieruchomości przejmuje bank.

PRZERWA – Gracz traci kolejkę.

START – Gracz, który przechodzi przez linię startu, pobiera z banku 180°.

ZWYCIĘSTWO – Gracz, który doprowadzi do bankructwa wszystkich swoich konkurentów, wygrywa. W przypadku, gdy nikt nie bankrutuje, a gracze chcą ustalić zwycięstwo, można podliczyć kapitał każdego gracza, czyli zsumować wartość wszystkich obiektów, posiadaną gotówkę, a także zastawione poprzez stanięcie na polu „Idź do kozy" obiekty po połowie ceny. Osoba o największym kapitale wygrywa.

Karty z pytaniami

Jakie wymiary może mieć prostokąt o polu 12 cm^2?	Zamień na ary: 2500 m^2	Zamień na ary: 0,04 km^2	Zamień na hektary: 50a
Czy proste pokrywające się są równoległe?	Jakie pole ma deltoid o przekątnych długości 4 cm i 8 cm?	Prostokąt ma pole 10 cm^2. Jakie pole ma czworokąt, którego wierzchołkami są środki boków prostokąta?	Oblicz pole trapezu prostokątnego, którego krótsze ramię i krótsza podstawa mają długość 3 cm, a dłuższa podstawa jest o 2 cm większa

Pole kwadratu wynosi 36 cm^2. Jaka jest długość boku tego kwadratu?	8400 dm^2 Ile to m^2?	Jaką miarę ma kąt ostry w trójkącie prostokątnym równoramiennym?	Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma miarę 120°. Jakie miary mają pozostałe kąty tego trójkąta?
Ile wynosi suma miar kątów wewnętrznych w równoległoboku?	Ile wynosi suma miar kątów ostrych w trójkącie prostokątnym?	Ile wynosi suma miar kątów wewnętrznych w dowolnym trójkącie?	Ile wynosi suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu trapezu?
Ile litrów wody mieści się w szklanym naczyniu o pojemności 5 dm^3?	Ile wynosi obwód prostokąta o wymiarach 20 mm × 5 cm?	Ile wynosi pole trójkąta, w którym podstawa ma długość 3 cm, a wysokość jest o 0,5 cm większa od połowy podstawy?	Ile kątów prostych ma trapez prostokątny?

Czy boki trójkąta mogą mieć długość 1 cm, 2 cm, 3 cm?	Czy boki trójkąta mogą mieć długości 70 mm, 9 cm oraz 1,5 dm?	Czy kąty trójkąta mogą mieć miary: 23°, 63°, 84°?	Ile wynosi pole prostokąta o wymiarach: 2 m × 7 dm?
Ile wynosi pole prostokąta o wymiarach: 1 dm × 160 cm?	Pole prostokąta jest równe 30 cm^2. Jaką długość ma dłuższy bok prostokąta jeśli krótszy ma 50 mm?	12,5 m^2 Ile to centymetrów kwadratowych?	0,07 km^2 Ile to metrów kwadratowych?
Ile przekątnych wychodzi z jednego wierzchołka siedmiokąta?	Przekątna kwadratu ma długość 8 cm. Ile wynosi pole tego kwadratu?	Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość 3 cm i 4 cm. Ile wynosi pole trójkąta?	Jeden z boków prostokąta wynosi 3 dm, a drugi jest dwa razy dłuższy. Ile wynosi obwód tego prostokąta?

Wychodzisz z kozy!!! Zachowaj tę kartę	Pod jakim kątem przecinają się przekątne rombu?	Ile wynosi suma miar dwóch kątów przyległych?	Jak nazywa się czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych?
W której ćwiartce układu współrzędnych leży punkt o pierwszej współrzędnej dodatniej i drugiej ujemnej?	W której ćwiartce układu współrzędnych leży punkt o pierwszej współrzędnej ujemnej i drugiej dodatniej?	Ile wynosi suma miar kątów dowolnego czworokąta?	Czy trójkąt o kątach 65° i 50° może być równoramienny?

XI. Bryły

9. Temat lekcji: Ile klocków Lego potrzeba na zbudowanie domku w skali 100:1 w stosunku do przygotowanego modelu?

Podstawowe pojęcia: skala, pola figur płaskich, jednostki długości i pola, objętość graniastosłupa.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 40.

18. Temat lekcji: Czy milion złotych zmieści się w moim pokoju?

Podstawowe pojęcia: polskie jednostki monetarne, średnica okręgu, jednostki wagi, objętość prostopadłościanu.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 61.

22. Temat lekcji: Kulki w szklance i pierwsza kropla wody

Podstawowe pojęcia: walec, kula, liczba Pi, objętość walca, objętość kuli.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: I. Liczby wymierne dodatnie, s. 74.

53. Temat lekcji: Jak szybko zużyjesz mydło, jeśli po tygodniu wszystkie jego wymiary zmniejszyły się do połowy?

Podstawowe pojęcia: prostopadłościan, objętość prostopadłościanu.

Scenariusz lekcji znajduje się w dziale: VI. Wyrażenia algebraiczne, s. 183.

63. Temat lekcji: Jaką masę ma 1 cm^3 dwukilogramowego kamienia?

Na podstawie pracy Krystyny Rosińskiej oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: objętość bryły o nieregularnych kształtach, obliczanie masy z proporcji, działania na liczbach wymiernych.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
   6) szacuje wartości wyrażeń arytmetycznych.
11. Bryły. Uczeń:
   2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym);

Rekomendacja ekspertki CEO:
Ciekawy, realny do wykonania, pomysł z wykorzystaniem akwarium i kamienia na przeprowadzenie eksperymentu, na obliczenie objętości przedmiotu o nieregularnym kształcie oraz obliczenie masy części przedmiotu.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Jaką masę ma 1 cm^3 dwukilogramowego kamienia?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Przypuszczenia grupy wskazują na to, że 1 cm^3 kamienia będzie ważył około 8 g.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Poziom wody.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Ilości wlanej wody i wielkości kamienia.

Instrukcja do doświadczenia:
Do akwarium o wymiarach 40×22 cm wlewamy wodę. Następnie wkładamy dwukilogramowy kamień. Mierzymy, o ile podniósł się poziom wody. Obliczamy objętość kamienia, a następnie, układając odpowiednią proporcję, liczymy masę 1 cm^3 tego kamienia.

BHP:
Zachowanie ostrożności przy wkładaniu kamienia (akwarium może pęknąć i woda się rozleje).

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Wysokość wody po włożeniu kamienia do akwarium – 7 mm = 0,7 cm.

Waga kamienia wynosi 2 kg = 2000 g.

Objętość kamienia : $V = 22 \times 40 \times 0{,}7$ cm = 616 cm^3.

616 cm^3 – 2000 g

1 cm^3 – x

1 cm^3 kamienia waży około 3,2 g.

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Jakie będą wyniki pomiaru, gdy użyjemy innego materiału?

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Przed przystąpieniem do doświadczenia warto podać, jaką masę ma 1 cm^3: puchu (styropianu), wody i cegły.

64. Temat lekcji: Ile litrów wody zmieści się w sześcianie o krawędzi 10 cm?

Na podstawie pracy Anity Bałdys oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Barbara Uniwersał

Podstawowe pojęcia: krawędź, sześcian, obojętność sześcianu.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
11. Bryły. Uczeń:
   1) rozpoznaje graniastosłupy (…) prawidłowe;
   2) oblicza (…) objętość graniastosłupa prostego (…);
   3) zamienia jednostki objętości.

Rekomendacja ekspertki CEO:
To doświadczenie, chociaż wymaga pewnych nakładów finansowych (potrzebny jest stosowny model sześcianu, ewentualnie innych brył), pokazuje ważny związek, niełatwy dla uczniów (decymetr sześcienny to litr) – w sposób bardzo widowiskowy, a jednocześnie potwierdzalny obliczeniami.

Temat w formie pytania badawczego lub problemowego:
Ile litrów wody zmieści się w sześcianie o krawędzi 10 cm?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
– zmieści się 0,5 litra;
– zmieści się 1,5 litra.

OPIS DOŚWIADCZENIA

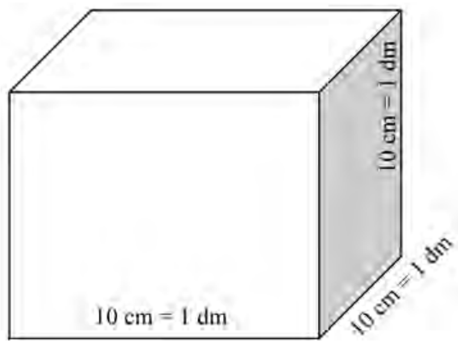
Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Ilość wody mieszczącej się w sześcianie.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Objętości sześcianu.

Instrukcja do doświadczenia:
Przygotujemy sześcian o boku 10 cm – plastikowy, szklany lub z grubego kartonu (najlepiej foliowanego). Mierzymy linijką wymiary sześcianu, liczymy jego objętość. Napełniamy go wodą, następnie wodę przelewamy do pojemnika z miarką.

Należy zachować ostrożność przy użyciu szklanego sześcianu.
Ostrożnie wlewać wodę.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:



Liczymy objętość . $V = a \times b \times c$

$V = 10 \times 10 \times 10$ cm = 1000 cm^3

$V = 1 \times 1 \times 1$ dm = 1dm^3 1 dm^3 = 1000 cm^3

Do sześcianu wszedł cały litr.

1 litr = 1000 cm^3 = 1 dm^3

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Można sprawdzić, ile wody mieszczą (a więc jaką mają objętość) inne bryły, na przykład ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości 10 cm i krawędzi podstawy 10 cm, a następnie przeprowadzić analizę.

Informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby powtórzyć doświadczenie:
Prawidłowo wykonane doświadczanie powinno pokazać uczniom, że 1 decymetr sześcienny to 1 litr.

65. Temat lekcji: Czy więcej ryżu zmieści się w wyższym walcu czy niższym?

Na podstawie pracy Moniki Kuzi oraz jej uczniów. Opiekunka grupy uczniowskiej uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie" w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspertka CEO, Danuta Sterna

Podstawowe pojęcia: walec, objętość walca.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
11. Bryły. Uczeń:
   2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).

Rekomendacja ekspertki CEO:
Eksperyment można wykonać w czasie jednej lekcji. Wynik zaskakuje uczniów. Przeprowadzając doświadczenie, uczniowie ćwiczą liczenie objętości walca.

Źródło:
Podobne doświadczenie (bardziej skomplikowane) rozpatrywane było w piśmie „Matematyka w szkole" wydawnictwa GWO.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Z dwóch jednakowych prostokątnych kartek, sklejając przeciwległe krawędzie każdej z nich, utworzono dwa walce (jeden sklejając wzdłuż krótszego, drugi – dłuższego boku). Jeden walec jest wysoki i wąski, a drugi niski i szeroki. Czy więcej ryżu zmieści się w wyższym walcu czy niższym, czy też dokładnie tyle samo ryżu zmieści się w obu walcach?

Hipoteza zaproponowana przez uczniów:
W obu walcach zmieści się tyle samo ryżu.
Hipoteza nie potwierdziła się.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Uczniowie przygotowali rysunki dwóch prostokątów. Wycieli je i utworzyli z nich dwa walce, sklejając ich przeciwległe boki. Wyższy walec wstawili do niższego. Wyższy wypełnili ryżem. Następnie unieśli wyższy walec, aby ryż przesypał się do niższego. Wtedy mogli odpowiedzieć na postawione im pytanie, który z walców ma większą objętość. Następnie w tabeli uczniowie zapisali swoje pomiary i obliczenia, w wyniku których obliczyli, jaką część niższego walca wypełni ryż z wyższego walca.

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Sposób sklejania prostokątów.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Objętość walca.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Powierzchni bocznej walców.

Instrukcja do doświadczenia:
1. Wytnij dwa identyczne prostokąty.
2. Zapisz w tabeli wysokości walców i obwody ich podstaw (jeden z boków prostokąta jest równy wysokości walca, a drugi obwodowi podstawy).
3. Utwórz z prostokątów dwa walce, sklejając ich przeciwległe boki.
4. Wyższy walec wstaw do niższego i ten wyższy wypełnij ryżem.
5. Unieś wyższy walec, aby ryż przesypał się do niższego. Co zauważyłeś?
6. Oblicz długości promieni podstaw walców.
7. Oblicz objętość walców (objętość walca obliczamy ze wzoru $V = \pi r^2 \cdot h$, gdzie r jest długością promienia podstawy, a h wysokością walca).
8. Oblicz, jaką część niższego walca wypełni ryż z wyższego walca.

BHP:
Po wykonaniu doświadczenia należy posprzątać ryż.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:

Rodzaj walca	Wysokość walca	Obwód podstawy	Długość promienia podstawy	Objętość walca	Objętość wyższego walca / Objętość niższego walca
Niższy walec					
Wyższy walec					

Obliczenia.

Propozycja modyfikacji eksperymentu:
Z dwóch jednakowych prostokątnych kartek i trzeciej kartki w kształcie kwadratu o tym samym polu co prostokąt, sklejając przeciwległe krawędzie każdej z nich, utwórz trzy walce. Powierzchnie boczne tych walców są takie same. Który z walców będzie miał największą objętość?

Dodatkowe informacje dla nauczycieli, którzy chcieliby wykorzystać pomysł:
Prawidłowo wykonane doświadczanie powinno pokazać różnicę w objętości walców.t

Scenariusze wykraczające poza podstawę programową

66. Temat lekcji: Ile stron i brzegów ma wstęga?

Na podstawie pracy Alicji Nimirskiej oraz jej uczniów. Autorka polecanego doświadczenia uczestniczyła w kursie „Eksperymentowanie i wzajemne nauczanie” w ramach projektu Akademia uczniowska realizowanego przez Fundację Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Opracowanie: ekspert CEO, Jerzy Kielech

Podstawowe pojęcia: wstęga Möbiusa, walec, powierzchnia boczna walca, symbol nieskończoności.

Fragment podstawy programowej związany z doświadczeniem zawierający treści nauczania określone w wymaganiach szczegółowych:
Doświadczenie wykracza poza wymagania szczegółowe treści nauczania podstawy programowej.

Cele kształcenia – wymagania ogólne:
V. Rozumowanie i argumentacja.
Uczeń prowadzi proste rozumowania, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania.

Źródło:
http://www.matematyka.wroc.pl.

Temat – w formie pytania badawczego lub problemowego:
Ile stron i brzegów ma wstęga?

Przykładowa hipoteza zaproponowana przez uczniów:
Wstęga ma dwie strony i dwa brzegi.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Zmienne występujące w doświadczeniu:
Jaką zmienną/wielkość będziemy zmieniać (zmienna niezależna)?
Liczbę skrętów o 180° prostokątnej wstęgi przed sklejeniem jej dwóch brzegów.

Jaką zmienną/wielkość będziemy mierzyć – obserwować (zmienna zależna)?
Liczbę stron i liczbę brzegów otrzymanej wstęgi.

Czego w naszym eksperymencie nie będziemy zmieniać (zmienne kontrolne)?
Prostokąta, z którego powstaje wstęga.

Instrukcja do doświadczenia:
Pracować będziecie w czwórkach. Pamiętajcie o dzieleniu się pracą. Dokumentujcie swoją pracę poprzez uzupełnienie tabelki, rysunki, wnioski itp.

A. Weźcie prostokątny pasek papieru. Sklejcie go wąskimi bokami tak, aby otrzymać powierzchnię boczną walca. Ile ma stron, a ile brzegów?

Pokolorujcie powierzchnie, pamiętając, że pierwsza osoba maluje tak długo, aż dojdzie do miejsca, w którym rozpoczęła malowanie i dopiero gdy skończy, kolejna osoba rozpoczyna od niepomalowanej strony, postępując podobnie.

Ile kolorów było potrzebnych? Dlaczego?

Brzegi oznaczcie poprzez cięcie nożyczkami do wycinania ozdobnych motywów. Ile różnych wzorów było potrzebnych? Dlaczego?

Uzupełnijcie tabelkę.

B. Weźcie drugi prostokątny pasek papieru. Sklejcie go wąskimi bokami, wcześniej dokonując jednego skrętu paska – w ten sposób otrzymacie wstęgę Möbiusa.

Uzupełnijcie tabelkę. Ile wstęga ma stron, a ile brzegów?

Pokolorujcie powierzchnie, pamiętając, że pierwsza osoba maluje tak długo, aż dojdzie do miejsca, w którym rozpoczęła malowanie i dopiero gdy skończy, kolejna osoba rozpoczyna od niepomalowanej strony, postępując podobnie.

Ile kolorów było potrzebnych? Dlaczego?

Brzegi oznaczcie poprzez cięcie nożyczkami do wycinania ozdobnych motywów. Ile różnych wzorów było potrzebnych? Dlaczego?

BHP:
Stosujcie zasady BHP obowiązujące w pracowni matematycznej. Uważajcie podczas korzystania z nożyczek.

Proponowany sposób dokumentacji uczniowskiej:
Dokumentacja fotograficzna rezultatów: http://au.ceo.nq.pl/getpollfile.php?i=12729.

Wnioski i rysunki w kartach pracy.

Tabela

Rodzaj wstęgi	Liczba powierzchni	Liczba brzegów
W kształcie powierzchni walca		
Wstęga Möbiusa		

Propozycja modyfikacji eksperymentu:

1. Jeżeli dzisiejsze zajęcia Cię zainteresowały, możesz wykonać doświadczenia ze wstęgą o kilku skrętach.
2. Dla zainteresowanych:
   a. Co otrzymasz po przecięciu powierzchni bocznej walca wzdłuż linii poprowadzonej pośrodku? Zapisz swoją hipotezę. Wykonaj odpowiednie doświadczenie. Czy potwierdziła się Twoja hipoteza?
   b. Co otrzymasz, postępując tak samo ze wstęgą Möbiusa? Zapisz swoją hipotezę. Wykonaj odpowiednie doświadczenie. Czy potwierdziła się Twoja hipoteza?
   c. Co otrzymasz, rozcinając wstęgę Möbiusa w 1/3 szerokości? Zapisz swoją hipotezę. Wykonaj odpowiednie doświadczenie. Czy potwierdziła się Twoja hipoteza?

Dodatkowe komentarze dla nauczycieli:
Przed wykonaniem doświadczeń A i B jako wprowadzenie można przeprowadzić doświadczenie z niesklejoną wstęgą.

Lista szkół biorących udział w projekcie Akademia uczniowska

DOLNOŚLĄSKIE

- Gimnazjum w Bierutowie
- Publiczne Gimnazjum nr 2 w Bogatyni
- Gimnazjum Samorządowe nr 2 w Bolesławcu
- Gimnazjum nr 3 w Bolesławcu
- Gimnazjum nr 3 w Bożkowie
- Gimnazjum w Brzeziej Łące
- Gimnazjum w Chocianowie
- Gimnazjum nr 2 w Chojnowie
- Gimnazjum w Ciechowie
- Gimnazjum w Cieszkowie
- Gimnazjum nr 2 w Głogowie
- Publiczne Gimnazjum w Grodziszczu
- Gimnazjum w Gromadce
- Gimnazjum w Iwinach
- Gimnazjum nr 1 w Jeleniej Górze
- Gimnazjum w Jerzmankach
- Gimnazjum w Jeżowie Sudeckim
- Gimnazjum nr 1 w Jugowie
- Gimnazjum w Kostomłotach
- Gimnazjum nr 11 w Legnicy
- Gimnazjum w Lutomii Dolnej
- Gimnazjum w Łozinie
- Publiczne Gimnazjum w Mieroszowie
- Gimnazjum Samorządowe w Międzyborzu
- Gimnazjum w Mysłakowicach
- Gimnazjum w Niechlowie
- Gimnazjum w Nielubi
- Gimnazjum nr 2 w Nowej Rudzie
- Publiczne Gimnazjum w Porajowie

- Publiczne Gimnazjum w Przewornie
- Gimnazjum w Pszennie
- Gimnazjum w Radkowie
- Gimnazjum w Ruszowie
- Gimnazjum w Siedlcu
- Gimnazjum Publiczne w Ścinawie
- Gimnazjum w Ujeździe Górnym
- Gimnazjum nr 7 w Wałbrzychu
- Gimnazjum w Witoszowie Dolnym
- Gimnazjum w Wojcieszowie
- Publiczne Gimnazjum Sióstr Urszulanek Unii Rzymskiej we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 1 we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 2 we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 13 we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 14 we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 16 we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 17 we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 21 we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 23 we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 24 we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 26 we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 27 we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 28 we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 29 we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 30 we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 31 we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 34 we Wrocławiu
- Gimnazjum nr 38 we Wrocławiu
- Gimnazjum Publiczne w Ziębicach

MAZOWIECKIE

- Gimnazjum w Borkowie Kościelnym
- Gimnazjum w Cząstkowie Mazowieckim
- Gimnazjum Gminne w Dębem Wielkim
- Publiczne Gimnazjum w Dzierzgowie
- Gimnazjum Powiatowe w Garwolinie
- Gimnazjum Przymierza Rodzin w Garwolinie
- Publiczne Gimnazjum nr 1 w Garwolinie
- Publiczne Gimnazjum w Goszczynie
- Gimnazjum w Gowarowie

- Zespół Szkół w Hucie Mińskiej z s. w Cielechowiźnie
- Gimnazjum w Huszlewie
- Publiczne Gimnazjum w Kadzidle
- Zespół Szkół Samorządowych w Klwowie
- Publiczne Gimnazjum nr 1 w Kobyłce
- Gminne Gimnazjum w Koczargach Starych
- Publiczne Gimnazjum w Korczewie
- Gimnazjum w Izdebkach Kosnach
- Publiczne Gimnazjum w Lelisie
- Gimnazjum w Lucieniu
- Publiczne Gimnazjum w Łazach
- Gimnazjum nr 1 w Mławie
- Gimnazjum w Mokobodach
- Publiczne Gimnazjum nr 4 w Nowym Dworze Mazowieckim
- Publiczne Gimnazjum w Obierwi
- Publiczne Gimnazjum w Platerowie
- Gimnazjum z Oddziałami Integracyjnymi nr 8 w Płocku
- Powiatowe Gimnazjum Publiczne w Płońsku
- Publiczne Gimnazjum w Poświętnem
- Publiczne Gimnazjum w Przysusze
- Niepubliczna Europejskie Gimnazjum w Radomiu
- Niepubliczne Gimnazjum w Radomiu
- Publiczne Gimnazjum nr 13 w Radomiu
- Gimnazjum w Rościszewie
- Gimnazjum w Rybnie
- Publiczne Gimnazjum w Rząśniku
- Gimnazjum w Rzekuniu
- Gimnazjum nr 2 w Siedlcach
- Publiczne Gimnazjum nr 5 w Siedlcach
- Publiczne Gimnazjum w Siemiątkowie
- Gimnazjum w Siennicy
- Gimnazjum w Skórcu
- Gimnazjum w Sobolewie
- Publiczne Gimnazjum w Sochocinie
- Gimnazjum nr 1 w Sochaczewie
- Gimnazjum nr 1 w Starym Gralewie
- Gimnazjum w Stefanowie
- Publiczne Gimnazjum w Strachówce
- Prywatne Gimnazjum w Sulejówku
- Gimnazjum w Szczawinie Kościelnym

- Gimnazjum w Teresinie
- Społeczne Gimnazjum „Startowa" w Warszawie
- Gimnazjum nr 7 w Warszawie
- Gimnazjum nr 18 w Warszawie
- Prywatne Gimnazjum nr 33 w Warszawie
- Gimnazjum nr 27 w Warszawie
- Gimnazjum nr 48 w Warszawie
- Gimnazjum nr 72 w Warszawie
- Gimnazjum nr 83 w Warszawie
- Gimnazjum nr 113 w Warszawie
- Gimnazjum w Węgrowie
- Gimnazjum w Woli Kiełpińskiej
- Gimnazjum nr 1 w Wyszkowie
- Publiczne Gimnazjum w Zabrodziu
- Publiczne Gimnazjum w Zwoleniu

ŚLĄSKIE

- Gimnazjum nr 6 w Będzinie
- Gimnazjum Towarzystwa Szkolnego w Bielsku-Białej
- Gimnazjum nr 10 w Bielsku-Białej
- Gimnazjum w Boronowie
- Gimnazjum Dwujęzyczne w Chorzowie
- Gimnazjum nr 1 w Chorzowie
- Gimnazjum w Ciasnej
- Gimnazjum nr 2 w Czerwionce-Leszczynach
- Publiczne Gimnazjum SPSK w Częstochowie
- Gimnazjum nr 2 w Częstochowie
- Gimnazjum ETE w Gliwicach
- Gimnazjum nr 1 w Gliwicach
- Gimnazjum nr 7 w Gliwicach
- Gimnazjum nr 10 w Gliwicach
- Gimnazjum w Irządzach
- Gimnazjum nr 9 w Jastrzębiu-Zdroju
- Gimnazjum nr 11 w Jaworznie
- Gimnazjum nr 17 w Katowicach
- Publiczne Gimnazjum SPSK w Kłobucku
- Publiczne Gimnazjum w Kobiernicach
- Gimnazjum nr 1 w Koniecpolu
- Gimnazjum w Kończycach Wielkich
- Gimnazjum nr 1 w Koszęcinie

- Gimnazjum nr 1 w Koziegłowach
- Gimnazjum w Lubecku
- Gimnazjum w Lublińcu
- Gimnazjum w Łobodnie
- Gimnazjum w Miedźnie
- Gimnazjum w Mnichu
- Gimnazjum w Mstowie
- Gimnazjum Sportowe w Mysłowicach
- Gimnazjum nr 4 w Mysłowicach
- Gimnazjum w Ornontowicach
- Gimnazjum nr 1 w Pilicy
- Gimnazjum w Poczesnej
- Gimnazjum w Poraju
- Gimnazjum nr 1 w Rudzie Śląskiej
- Gimnazjum nr 3 w Rudzie Śląskiej
- Gimnazjum nr 7 w Rudzie Śląskiej
- Katolickie Niepubliczne Gimnazjum nr 5 w Sosnowcu
- Gimnazjum nr 16 w Sosnowcu
- Gimnazjum w Starym Cykarzewie
- Gimnazjum nr 2 w Strzebiniu
- Gimnazjum nr 1 w Tarnowskich Górach
- Sportowe Gimnazjum nr 9 w Tychach
- Gimnazjum nr 10 w Tychach
- Gimnazjum nr 2 w Ustroniu
- Gimnazjum we Wrzosowej
- Publiczne Gimnazjum w Zabrzu
- Gimnazjum nr 4 w Zabrzu
- Gimnazjum nr 6 w Zabrzu
- Gimnazjum w Żarkach
- Gimnazjum w Żelisławicach
- Gimnazjum nr 4 w Żorach

WARMIŃSKO-MAZURSKIE

- Gimnazjum w Baniach Mazurskich
- Gimnazjum w Baranowie
- Gimnazjum nr 1 w Bartoszycach
- Gimnazjum nr 2 w Bartoszycach
- Katolickie Gimnazjum Społeczne w Biskupcu
- Gimnazjum nr 1 w Braniewie
- Gimnazjum nr 2 w Braniewie

- Gimnazjum w Durągu
- Gimnazjum nr 1 w Działdowie
- Gimnazjum nr 2 w Działdowie
- Gimnazjum nr 3 w Elblągu
- Gimnazjum nr 6 w Elblągu
- Gimnazjum nr 7 w Elblągu
- Gimnazjum nr 8 w Elblągu
- Gimnazjum nr 4 w Ełku
- Gimnazjum we Fromborku
- Gimnazjum w Garbnie
- Gimnazjum w Gawlikach Wielkich
- Gimnazjum w Górowie Iławieckim
- Gimnazjum Publiczne w Iławie
- Gimnazjum nr 2 w Iławie
- Publiczne Gimnazjum w Iłowie-Osadzie
- Gimnazjum w Janowie
- Gimnazjum w Kazanicach
- Gimnazjum nr 3 w Kętrzynie
- Gimnazjum w Kijewie
- Gimnazjum w Kinkajmach
- Publiczne Gimnazjum w Kisielicach
- Gimnazjum w Korszach
- Gimnazjum w Kurzętniku
- Gimnazjum nr 2 w Lidzbarku Warmińskim
- Gimnazjum w Łupkach
- Gimnazjum w Marzęcicach
- Gimnazjum w Miłakowie
- Gimnazjum w Miłomłynie
- Gimnazjum w Mrocznie
- Publiczne Gimnazjum w Młynarach
- Gimnazjum w Nidzicy
- Gimnazjum nr 2 w Nidzicy
- Gimnazjum nr 3 w Nidzicy
- Zespół Szkół nr 1 w Nidzicy
- Publiczne Gimnazjum w Nowym Grodzicznie
- Gimnazjum nr 1 w Olecku
- Gimnazjum nr 2 w Olsztynie
- Gimnazjum nr 8 w Olsztynie
- Gimnazjum nr 14 w Olsztynie
- Gimnazjum nr 15 w Olsztynie

- Gimnazjum nr 22 w Olsztynie
- Społeczne Gimnazjum 101 w Olsztynie
- Gimnazjum nr 1 w Ornecie
- Gimnazjum nr 2 w Ornecie
- Gimnazjum nr 1 w Ostródzie
- Gimnazjum nr 2 w Ostródzie
- Gimnazjum w Pasymiu
- Samorządowe Gimnazjum Publiczne w Piszu
- Gimnazjum w Prątnicy
- Gimnazjum w Spychowie
- Gimnazjum Publiczne w Starych Juchach
- Gimnazjum w Starym Dłutowie
- Gimnazjum w Suszu
- Gimnazjum nr 1 w Szczytnie
- Gimnazjum Publiczne w Szymanach
- Gimnazjum w Świętajnie
- Gimnazjum w Tolkmicku
- Gimnazjum w Zalewie
- Samorządowe Gimnazjum w Ząbrowie
- Publiczne Gimnazjum w Zyndakach
- Gimnazjum w Żabim Rogu

WIELKOPOLSKIE

- Gimnazjum w Brzezinach
- Gimnazjum w Drawsku
- Publiczne Gimnazjum w Drążnej
- Publiczne Gimnazjum w Godzieszach Wielkich
- Gimnazjum nr 2 w Gostyniu
- Gimnazjum w Iwanowicach
- Gimnazjum w Jankowie Przygodzkim
- Gimnazjum nr 3 w Jarocinie
- Gimnazjum nr 5 w Jarocinie
- Gimnazjum w Kaczorach
- Gimnazjum nr 4 w Kaliszu
- Gimnazjum nr 9 w Kaliszu
- Gimnazjum nr 2 w Kępnie
- Gimnazjum w Kobylej Górze
- Gimnazjum w Kołaczkowie
- Gimnazjum nr 5 w Koninie
- Gimnazjum nr 7 w Koninie

- Gimnazjum nr 2 w Kościanie
- Gimnazjum nr 4 w Kościanie
- Gimnazjum w Koźminku
- Gimnazjum w Krążkowych
- Niepubliczne Gimnazjum w Krotoszynie
- Gimnazjum w Krzyżu Wlkp.
- Gimnazjum w Lasocicach
- Gimnazjum w Lubiniu
- Gimnazjum w Ludomach
- Publiczne Gimnazjum w Miasteczku Krajeńskim
- Gimnazjum w Marchwaczu
- Gimnazjum w Mielżynie
- Gimnazjum w Mikorzynie
- Gimnazjum w Opalenicy
- Gimnazjum w Opatowie
- Zespół Szkół w Pięczkowie
- Gimnazjum nr 5 w Pile
- Gimnazjum w Poznaniu przy Zespole Szkół nr 7
- Gimnazjum nr 57 w Poznaniu
- Gimnazjum nr 67 w Poznaniu
- Gimnazjum w Przykonie
- Gimnazjum w Radliczycach
- Gimnazjum w Raszkowie
- Gimnazjum w Russowie
- Gimnazjum w Rychtalu
- Gimnazjum w Sierakowie
- Zespół Szkół w Sierakowie
- Gimnazjum w Stawie
- Gimnazjum nr 1 w Śremie
- Publiczne Gimnazjum w Taczanowie Drugim
- Gimnazjum w Trzemesznie
- Gimnazjum w Wapnie
- Gimnazjum nr 1 w Wągrowcu
- Gimnazjum w Wieleniu
- Gimnazjum nr 2 w Wolsztynie
- Gimnazjum SPSK w Wólce Czepowej
- Gimnazjum w Wysocku Małym
- Gimnazjum w Żytowiecku

Centrum Edukacji Obywatelskiej to niezależna instytucja edukacyjna, działająca od 1994 roku. Upowszechniamy wiedzę, umiejętności i postawy kluczowe dla społeczeństwa obywatelskiego. Wprowadzamy do szkół programy, które nauczycielkom i nauczycielom pozwalają lepiej i skuteczniej uczyć, a młodym ludziom pomagają zrozumieć świat, rozwijają krytyczne myślenie, wiarę we własne możliwości, zachęcają do angażowania się w życie publiczne i działania na rzecz innych. Obecnie realizujemy blisko 30 programów adresowanych do szkół, kadry pedagogicznej oraz uczniów i uczennic.

ISBN 978-83-64602-06-1

Egzemplarz bezpłatny